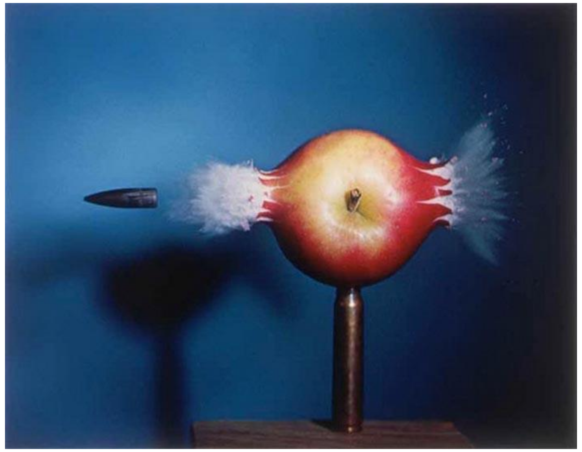
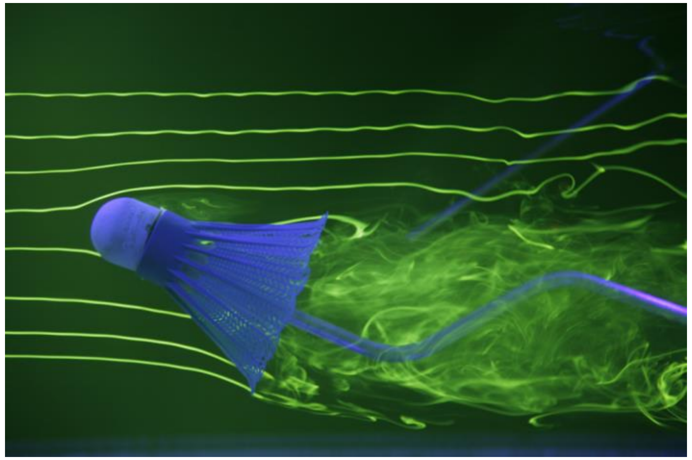
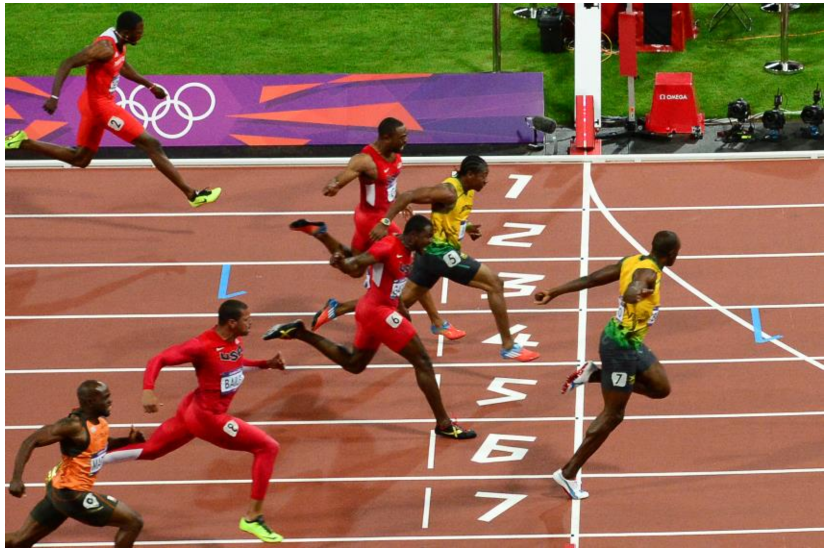
Cinématique du Solide





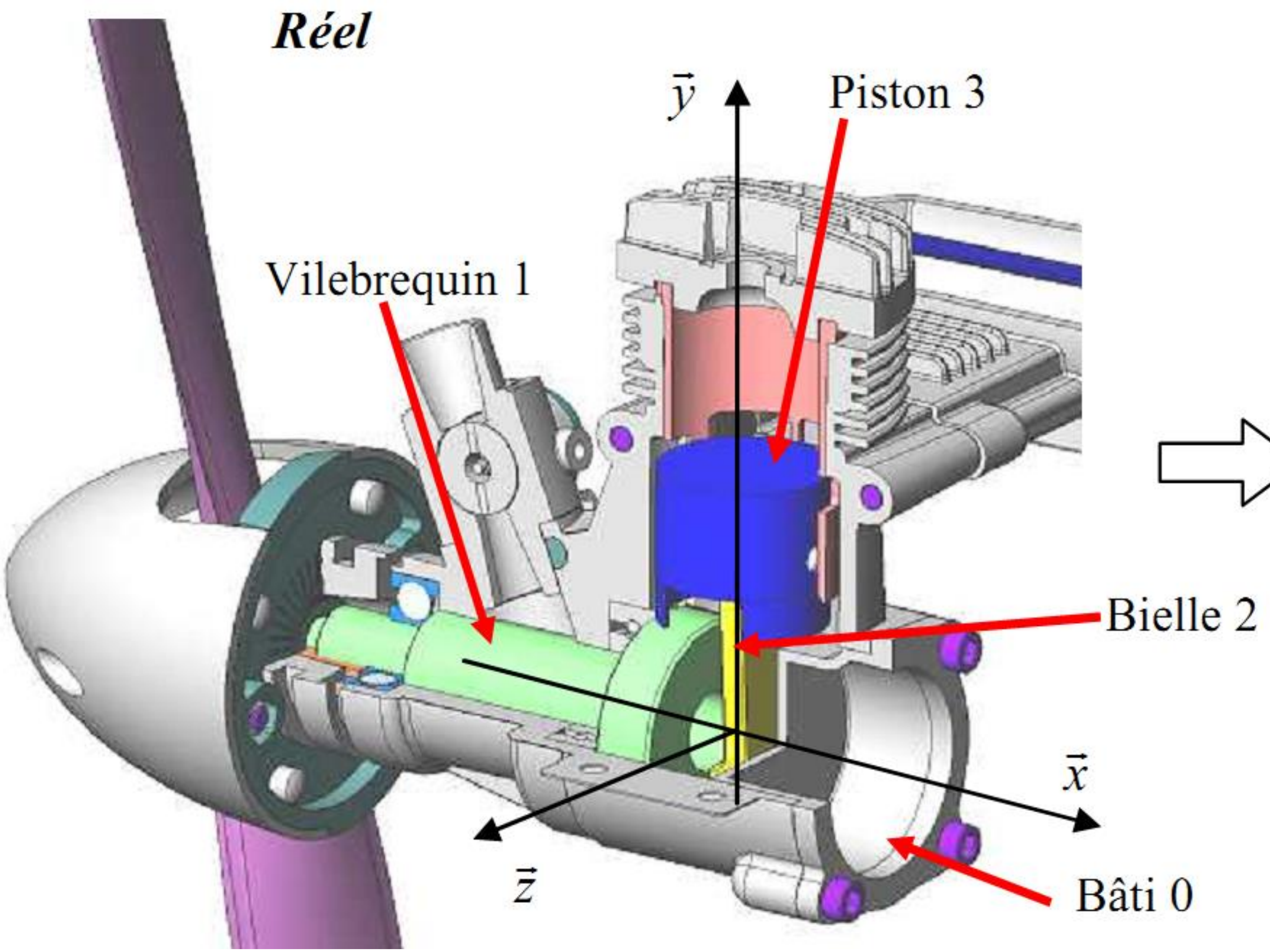


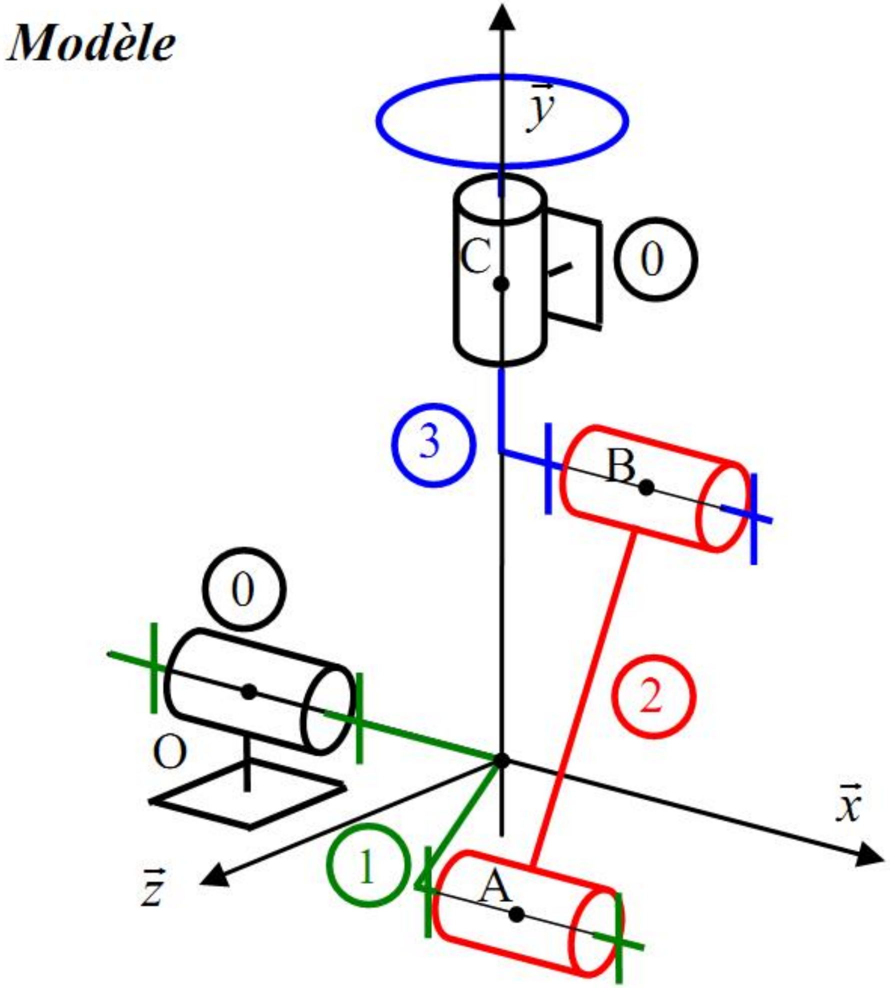
Cinématique du Solide

Compétences attendues :

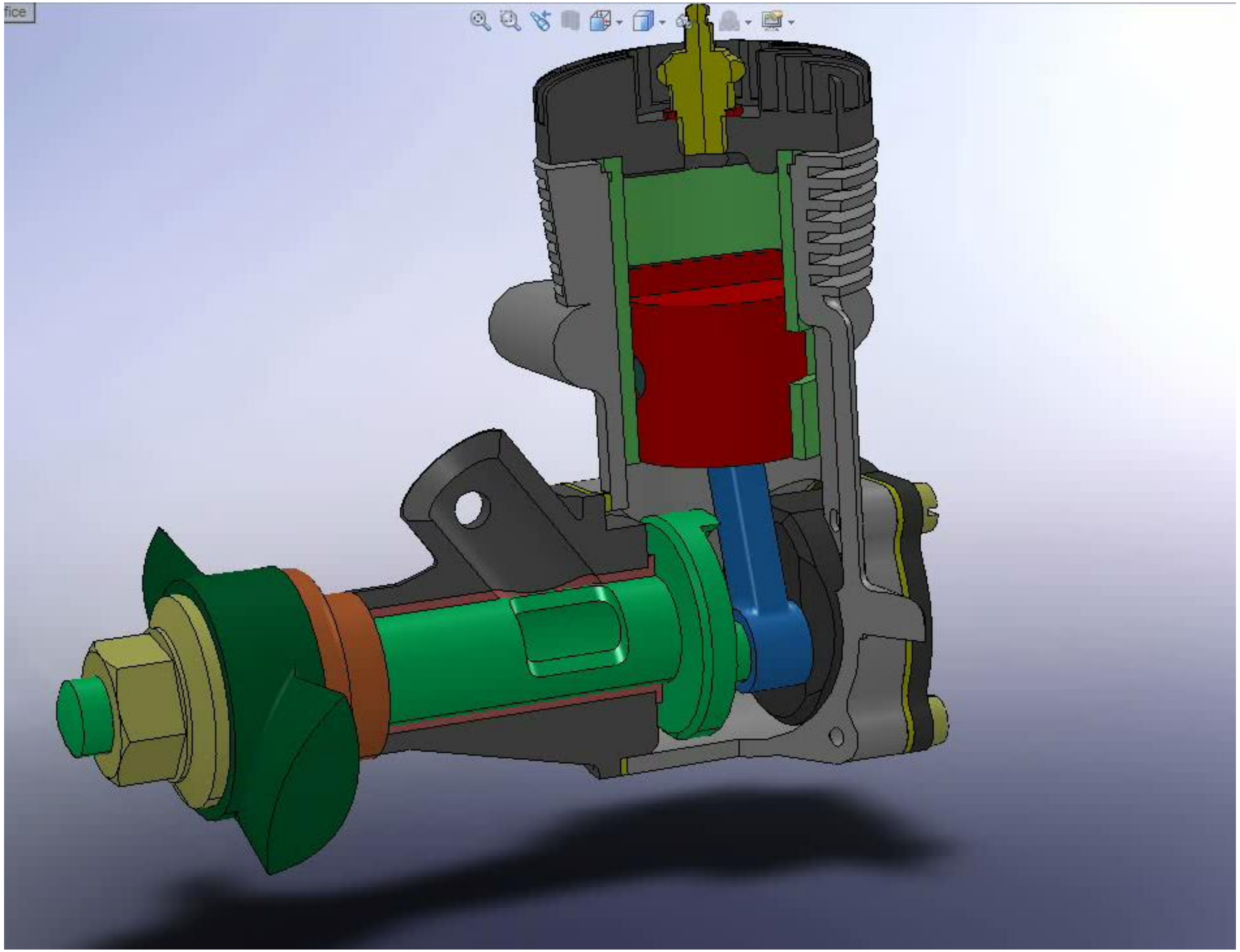
- ✓ Modéliser la cinématique d’un ensemble de solides.
- ✓ Caractériser le mouvement d’un repère par rapport à un autre repère.

Cinématique du Solide



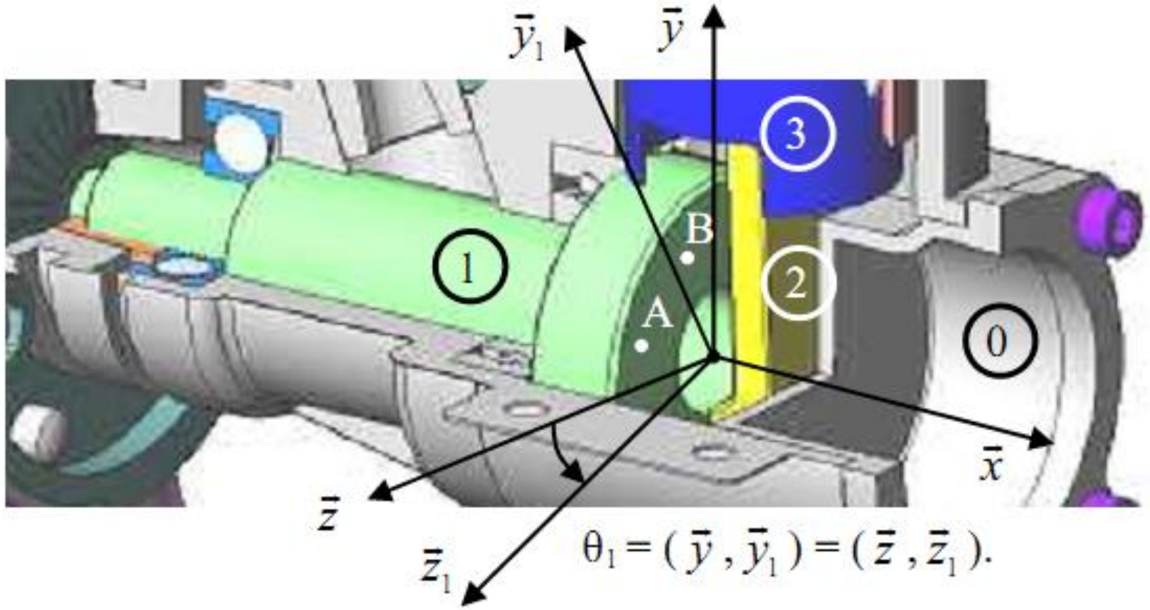


Cinématique du Solide



Cinématique du Solide

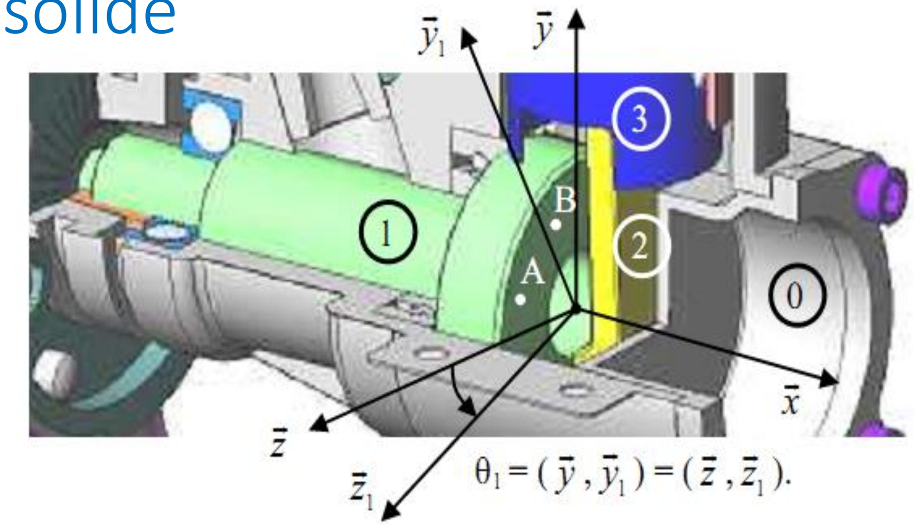
Champs des vecteurs vitesse des points d'un solide



Solide 1 → Indéformable → $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} = \vec{0}$

Cinématique du Solide

Champs des vecteurs vitesse des points d'un solide



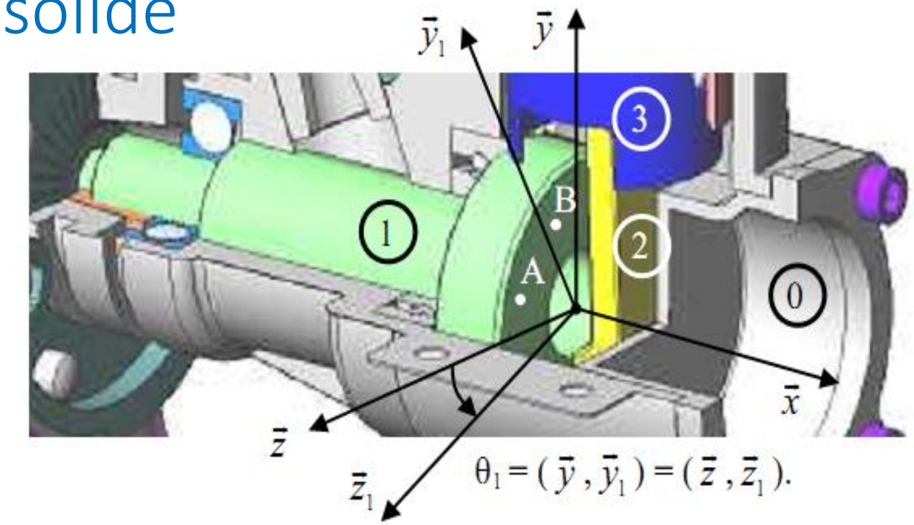
Calculons la dérivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au repère R :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{AB} \text{ est fixe dans } R_1$$

Cinématique du Solide

Champs des vecteurs vitesse des points d'un solide



En décomposant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en faisant apparaître le point O.

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_R - \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{B\in R_1/R}}} - \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}}$$

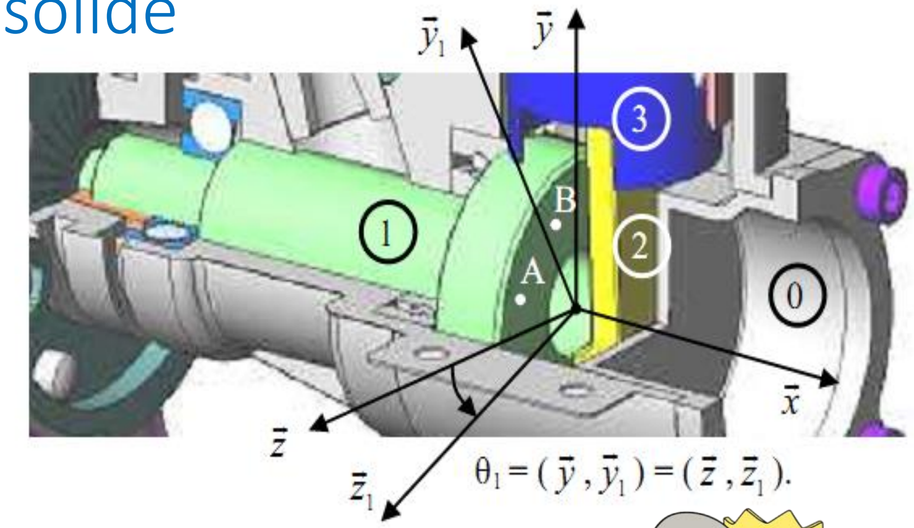
On obtient finalement :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_{B\in R_1/R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$$

(*formule du solide* ou *formule de Varignon*)

Cinématique du Solide

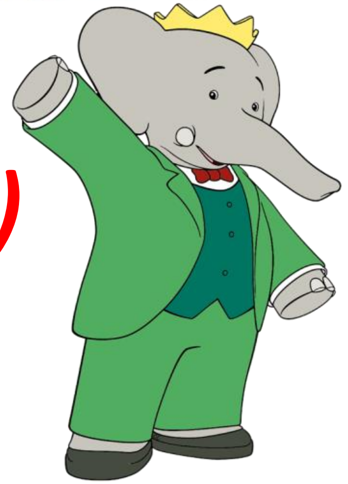
Champs des vecteurs vitesse des points d'un solide



<u>Remarque :</u>

$$\overrightarrow{V_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$$

(BABAR)



Cinématique du Solide

Torseur cinématique

Torseur cinématique du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère R (→ dépend du point d'écriture) :

- $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R}}$: vecteur (taux de) rotation du solide 1 par rapport au repère R.
  $\Omega_{R_1/R}$ = résultante du torseur cinématique.
- $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_1/R}}$: vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport repère R.
  $V_{A\in R_1/R}$ = moment au point A du torseur cinématique

$$\left\{\boldsymbol{V}_{R_1/R}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_1/R}} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{matrix}\right\}_{A,R}$$

Cinématique du Solide

Torseur cinématique

$$\left\{V_{R_1/R}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{matrix}\right\}_{A,R}$$

- Un torseur cinématique → mouvement relatif de deux solides.
- Si vitesse calculée au point A → torseur cinématique est réduit au point A.

Cinématique du Solide

Torseur cinématique

Exemple : Au point B ce torseur se déduit du torseur au point A :

$$\left\{V_{R_1/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \\ \overrightarrow{V_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \end{array}\right\}_B$$

Attention : Pour faire la somme de deux torseurs, ils doivent être écrits au même point ! !

Cinématique du Solide

Champs des vecteurs accélération des points d’un solide

Expression du champ des vecteurs accélération → dériver la formule du solide.

$$\overrightarrow{V_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{B\in R_1/R}}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in R_1/R}}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}\right]_R$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in R_1/R}} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

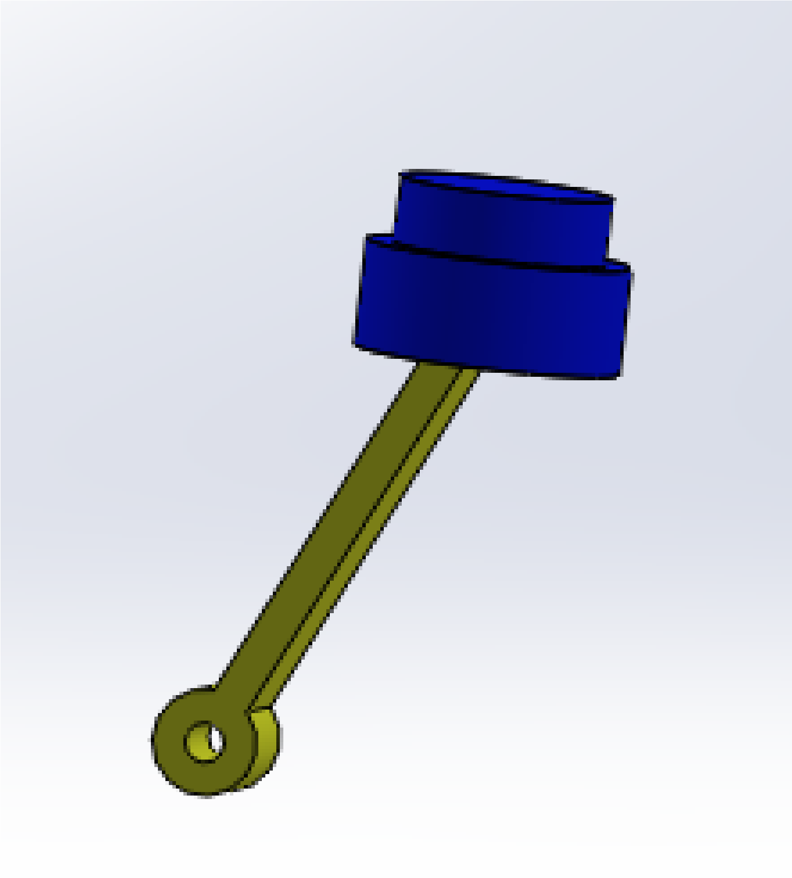
Cinématique du Solide

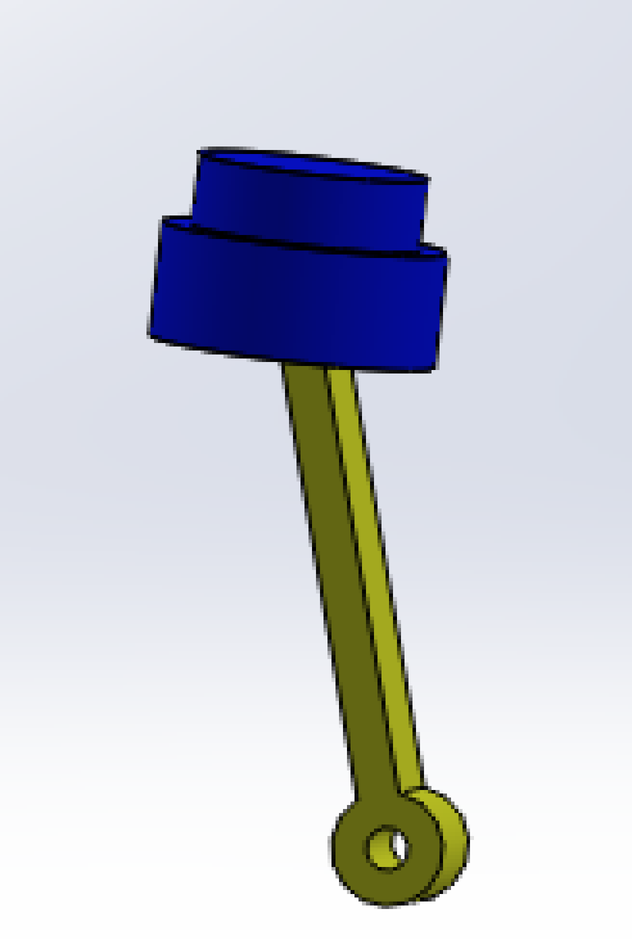
Champs des vecteurs accélération des points d'un solide

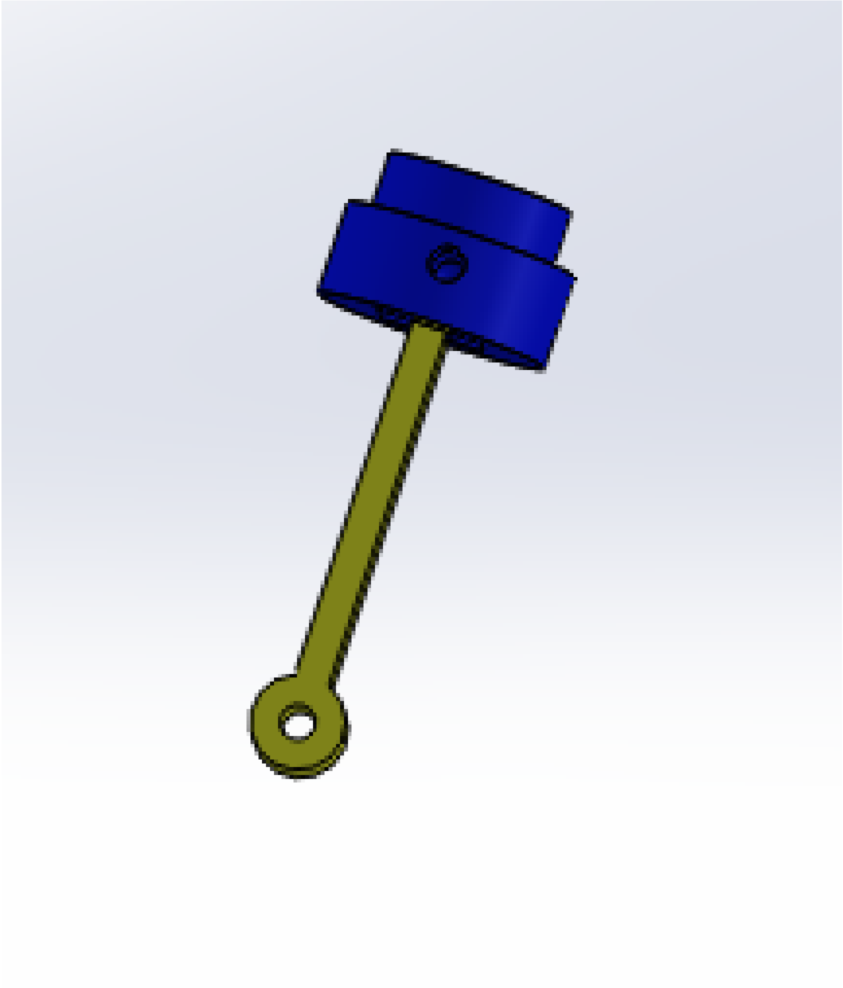
($\overrightarrow{AB}$ fixe dans R_1)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}_{A\in R_1/R}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \left[\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R}}\right]_{\boldsymbol{R}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R}} \wedge (\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}})$$

Composition de mouvement de solides indéformables

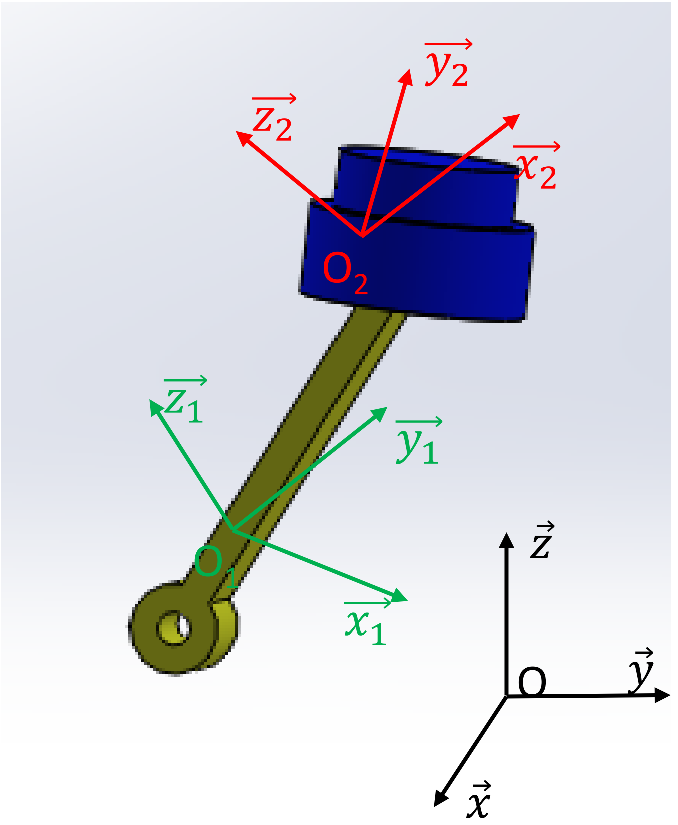






Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs vitesse



Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs vitesse

Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}}$ et $\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}}$?

Par définition :

$$\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right]_R = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}} = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs vitesse

d'où

$$\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}} = \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}}$$

vitesse absolue *vitesse relative* *vitesse d'entraînement*

<u>Généralisation :</u> $\overrightarrow{V_{A\in R_n/R_0}} = \overrightarrow{V_{A\in R_n/R_{n-1}}} + \overrightarrow{V_{A\in R_{n-1}/R_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{V_{A\in R_1/R_0}}$

Composition de mouvement de solides indéformables

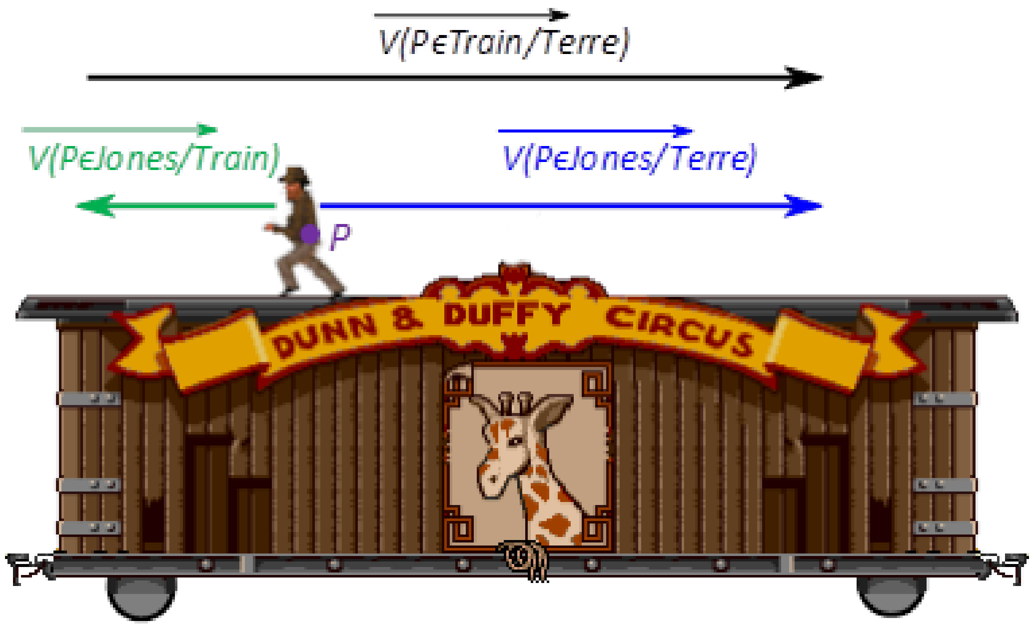
Composition des vecteurs vitesse

Exemple : Marche dans un train

Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs vitesse

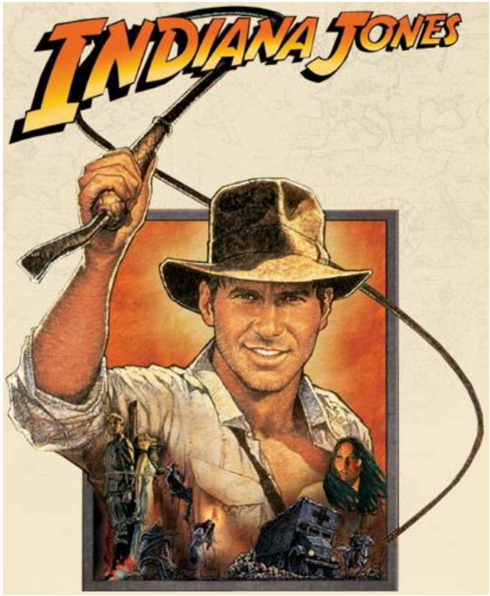
Exemple : Marche dans un train

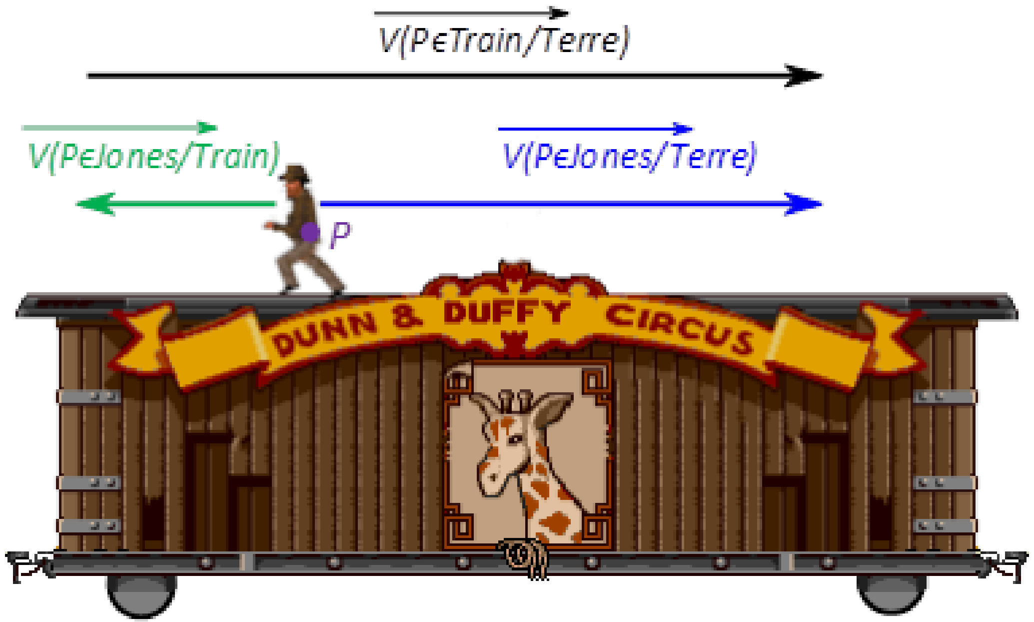


Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs vitesse

Exemple : Marche dans un train





$$\overrightarrow{V(P \in Jones/Terre)} = \overrightarrow{V(P \in Jones/Train)} + \overrightarrow{V(P \in Train/Terre)}$$

Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs rotation

Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}$?

Formule de dérivation vectorielle :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_2} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} \wedge \vec{U}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{U}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{U}$$

Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des vecteurs rotation

En ajoutant ces trois relations :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{U} = \vec{0}$$
$$(\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}) \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

→ Relation vraie pour tout $\vec{U}$ donc $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \vec{0}$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

<u>Généralisation :</u> $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{R_n/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_n/R_{n-1}}} + \overrightarrow{\Omega_{R_{n-1}/R_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}}$

Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des torseurs cinématiques

$$\{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{R}_2/\boldsymbol{R}}\} = \{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{R}_2/\boldsymbol{R}_1}\} + \{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{R}_1/\boldsymbol{R}}\}$$

Composition de mouvement de solides indéformables

Composition des accélérations

On admet que :

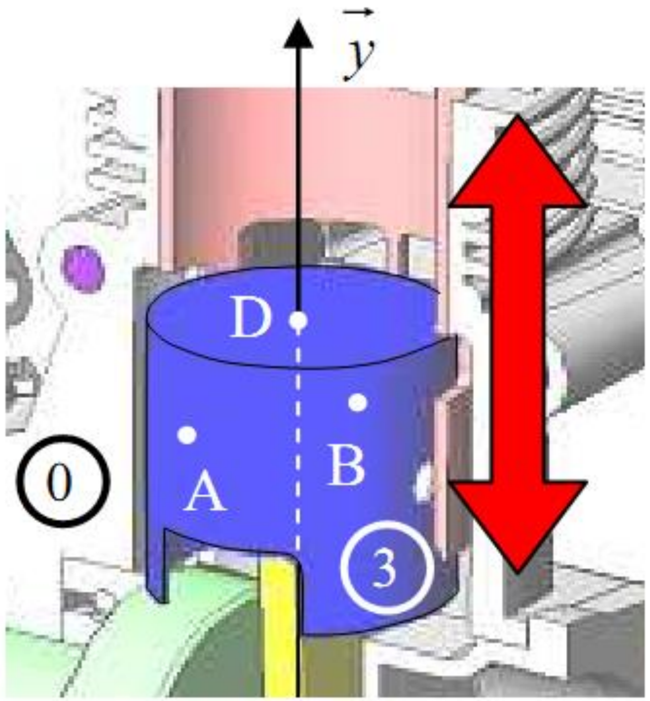
$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in R_2/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{A\in R_1/R}} + 2.\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}}$$

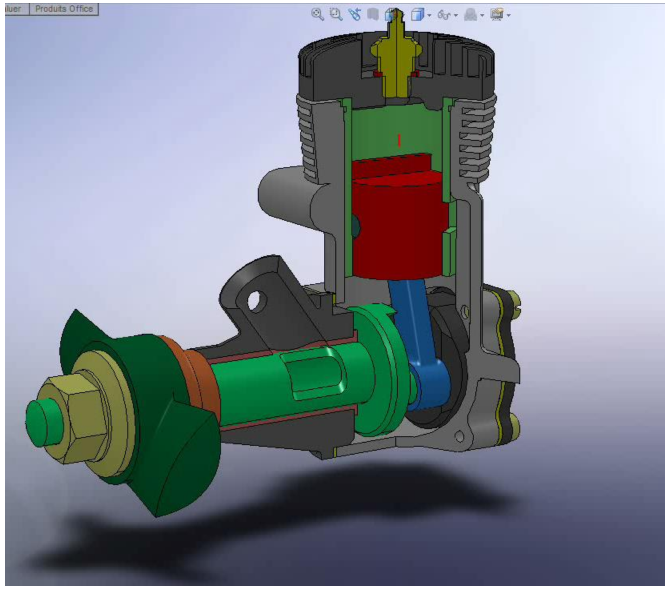
accélération absolue *accélération relative* *accélération d'entraînement* *accélération de Coriolis*

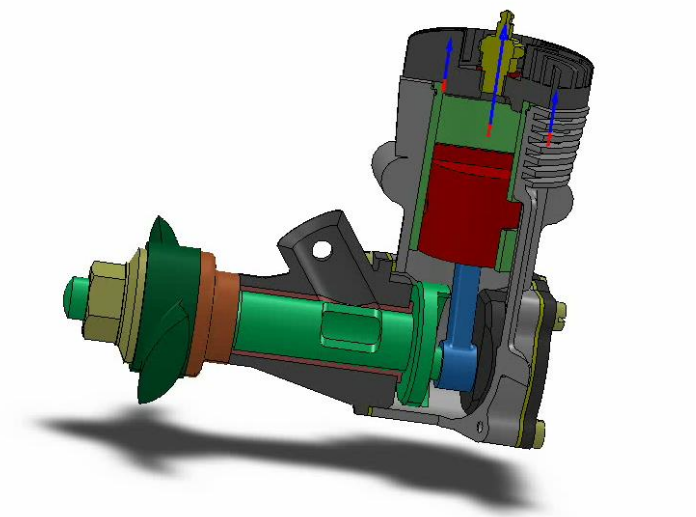
Mouvements particuliers

Le mouvement de translation

Piston 3 du moteur → mouvement de translation suivant l'axe $(D, \vec{y})$.



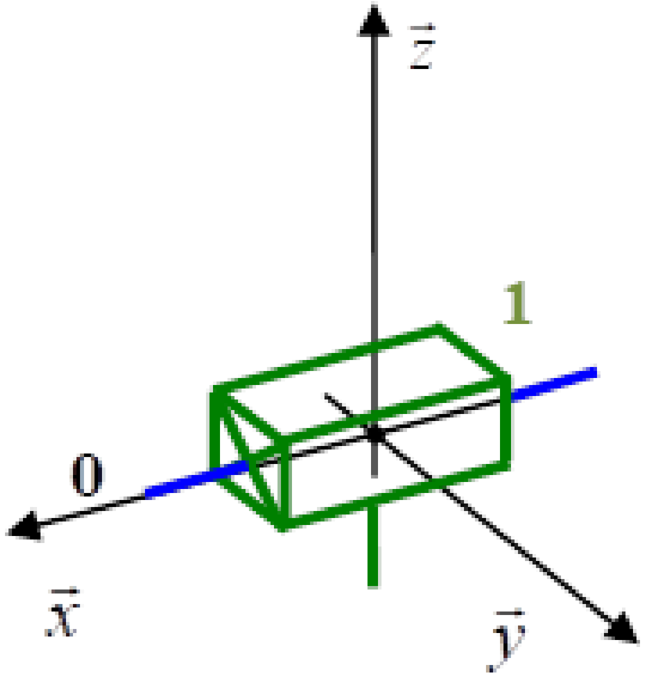




Si le solide 1 est en liaison glissière par rapport au solide 0 le mouvement relatif est appelé **mouvement de translation**.

Mouvements particuliers

Le mouvement de translation



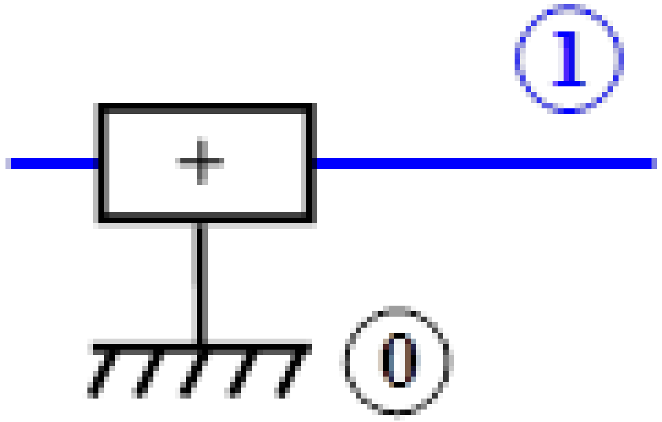
- Le solide 1 ne change pas d'orientation par rapport au solide 0

  $\rightarrow \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \vec{V} \quad \forall\, A \; et \; B \; \in (1)$
- Torseur cinématique : $\{\boldsymbol{V_{1/0}}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{0}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V}} \end{matrix}\right\}_{\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{1}}$: torseur couple
- Trajectoires de tous les points → identiques et superposables.

Mouvements particuliers

Le mouvement de translation

Trajectoires = droites → mouvement de TRANSLATION RECTILIGNE.



1/0 : Translation rectiligne

Mouvements particuliers

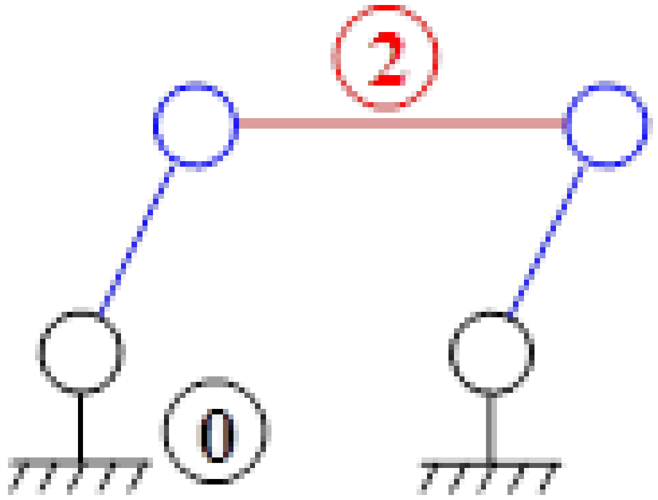
Le mouvement de translation

Trajectoires = droites → mouvement de TRANSLATION RECTILIGNE.

Mouvements particuliers

Le mouvement de translation

Trajectoires = cercles → TRANSLATION CIRCULAIRE.

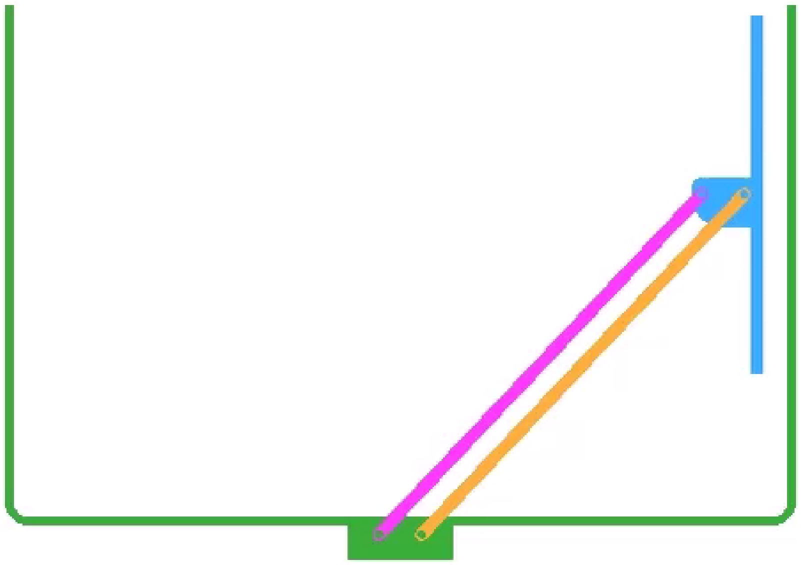


2/0 : Translation circulaire

Mouvements particuliers

Le mouvement de translation

Trajectoires = cercles → TRANSLATION CIRCULAIRE.



Mouvements particuliers

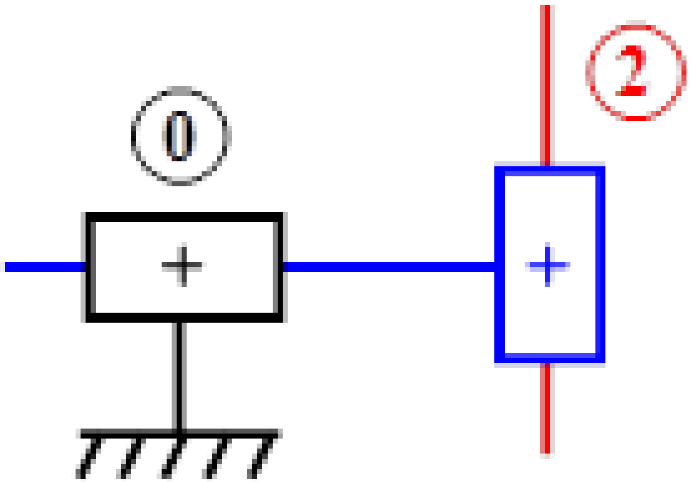
Le mouvement de translation

Trajectoires = cercles → TRANSLATION CIRCULAIRE.

Mouvements particuliers

Le mouvement de translation

Trajectoires quelconques (association en série de liaisons glissières)
→ mouvement de TRANSLATION QUELCONQUE.

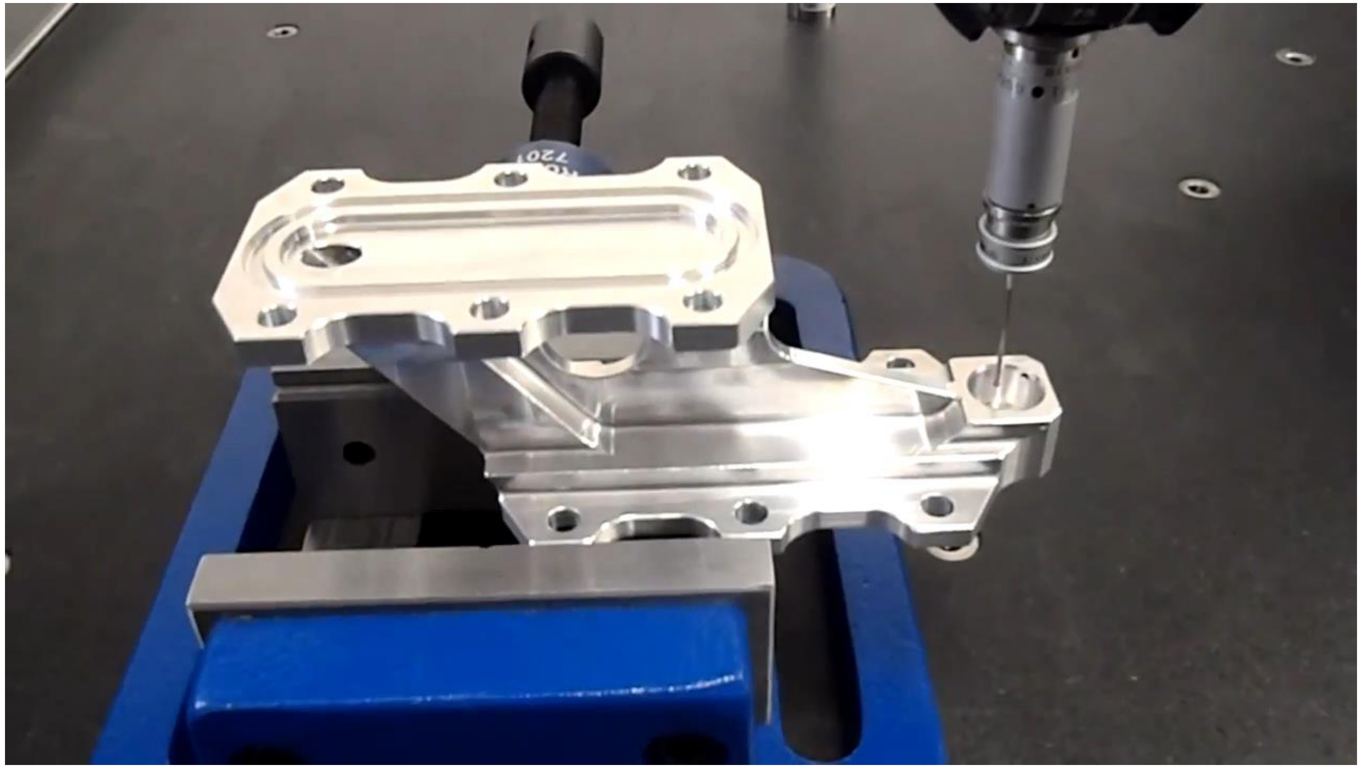


2/0 : Translation

Mouvements particuliers

Le mouvement de translation

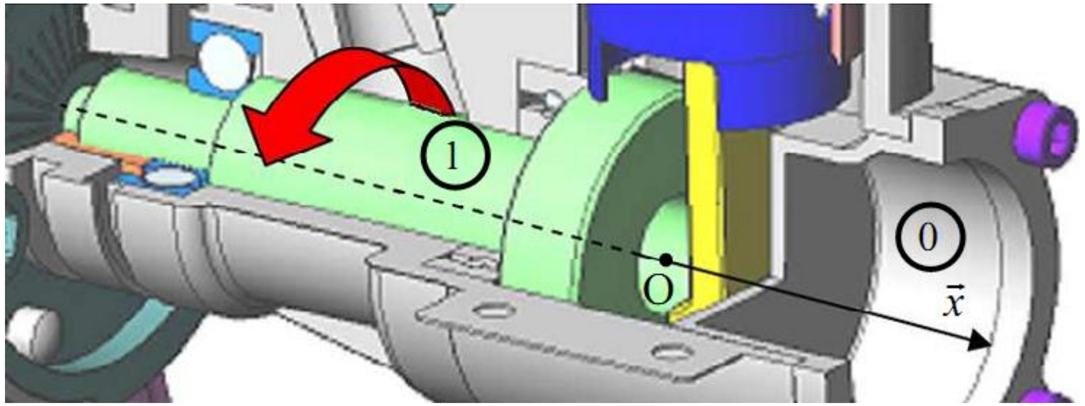
Trajectoires quelconques (association en série de liaisons glissières)
→ mouvement de TRANSLATION QUELCONQUE.

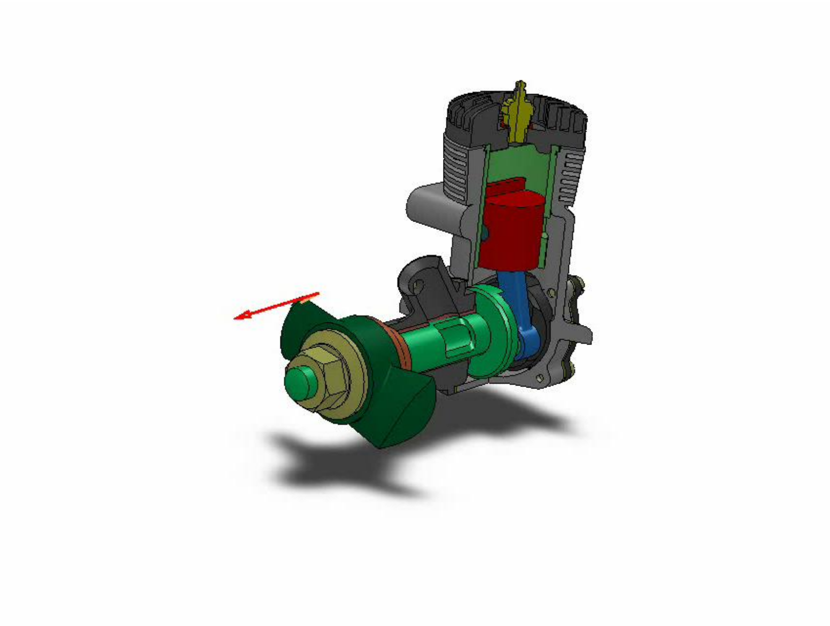


Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

Vilebrequin 1 → mouvement de rotation autour d'un axe fixe.





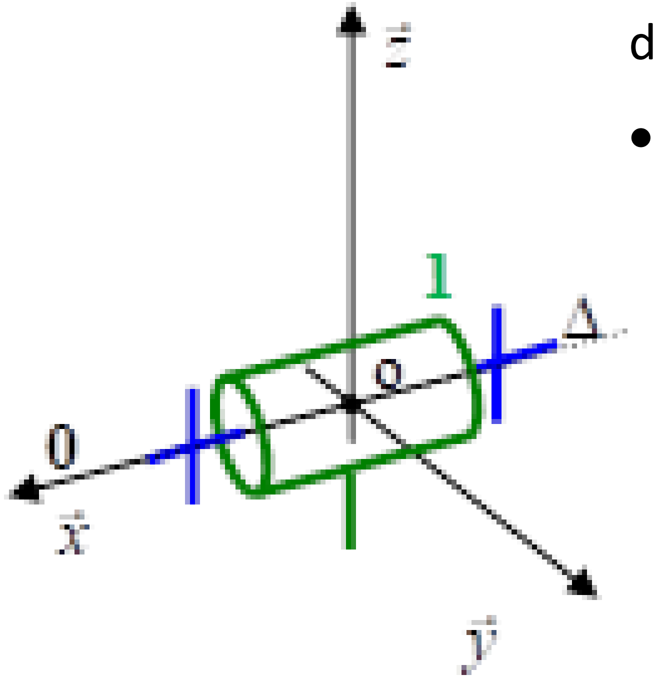
L'axe instantané de rotation du vilebrequin 1 par rapport au bâti 0 est l'axe $(O, \vec{x})$.

Par conséquent tous les points de l'axe $(O,\vec{x})$ restent fixes au cours du mouvement et :

$$\forall \boldsymbol{P} \in (\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{x}}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R})} = \vec{\mathbf{0}}$$

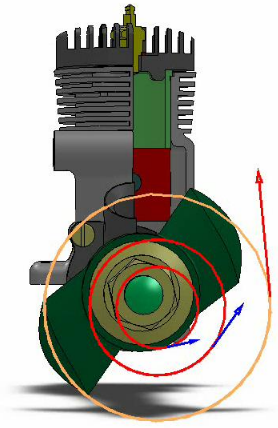
Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation



Il existe au moins deux points du solide 1 qui restent fixes dans le mouvement par rapport à 0 → Axe Δ = **Axe de rotation** de 1/0.

- Trajectoires de tous les points du solide 1 sont des cercles centrés sur l'axe Δ.

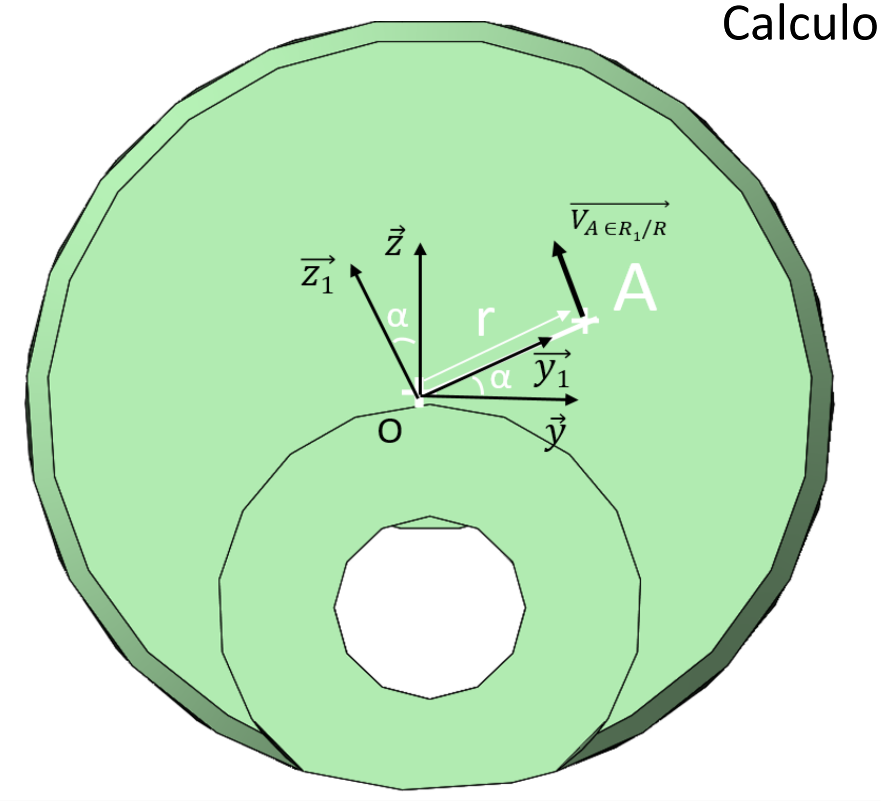


Si le solide 1 est en liaison pivot par rapport au solide 0 le mouvement relatif est appelé **mouvement de rotation**.

Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

Champs des vecteurs vitesse d'un solide en rotation



Calculons la vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport au solide 0

<u>Notations :</u>

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \omega \quad \overrightarrow{OA} = r.\overrightarrow{y_1} \quad \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}.\vec{x} = \omega.\vec{x}$$

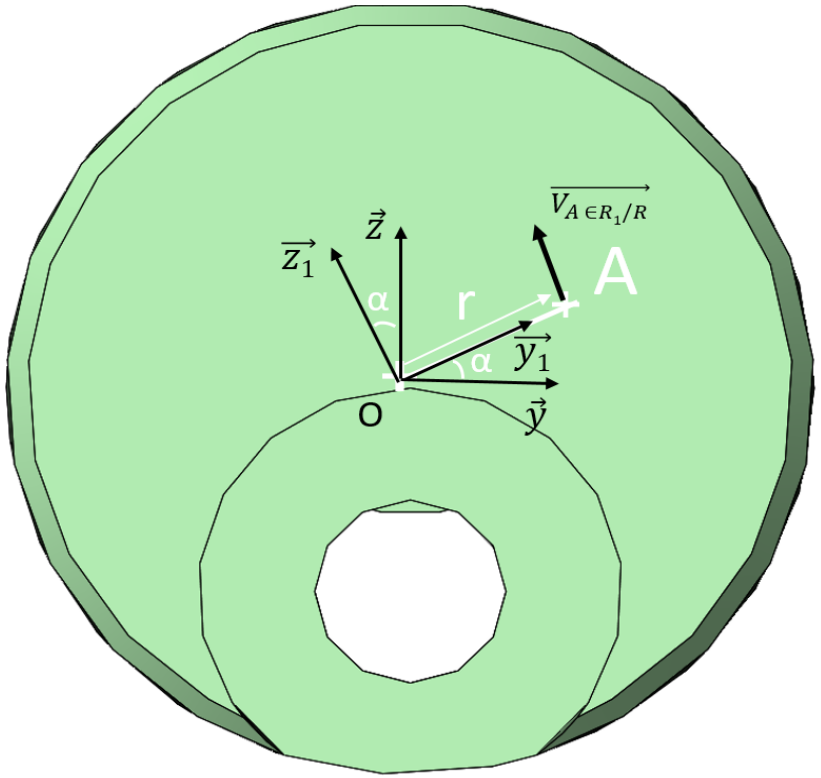
Calcul de la vitesse du point A :

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0} + \omega.\vec{x} \wedge r.\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = r.\omega.\overrightarrow{z_1}$$

Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

Champs des vecteurs vitesse d'un solide en rotation



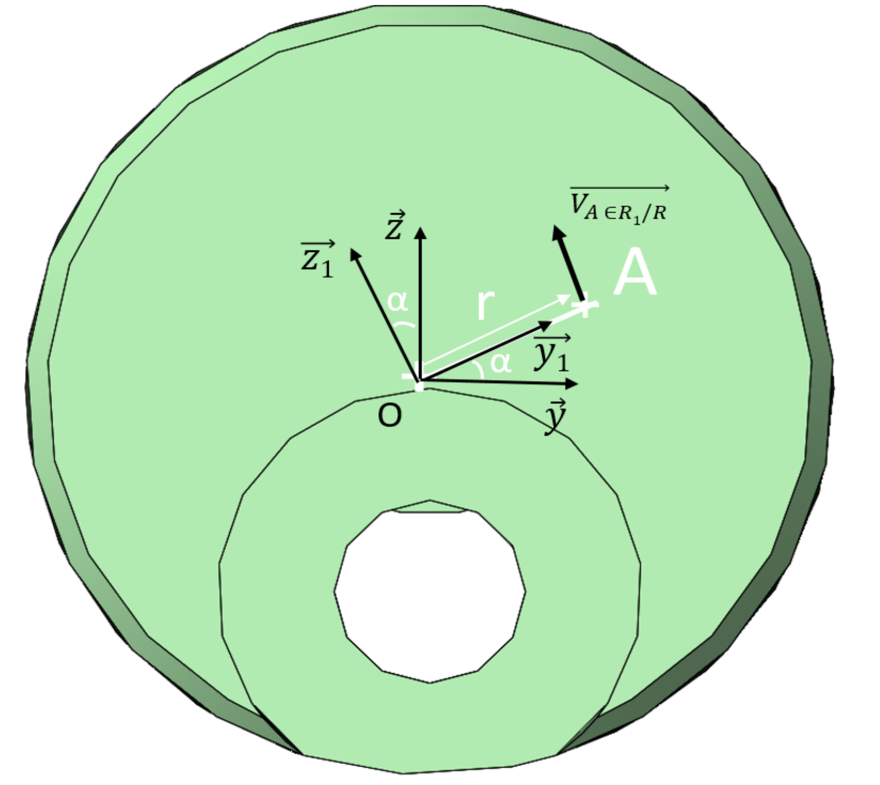
Conséquences :

- $\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ perpendiculaire à (OA)
- $\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ proportionnelle à r

Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

Champs des vecteurs vitesse d'un solide en rotation



$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega\vec{x} \\ r\omega\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_{A\in 1}$$

Torseur cinématique réduit au point 0 (fixe) :

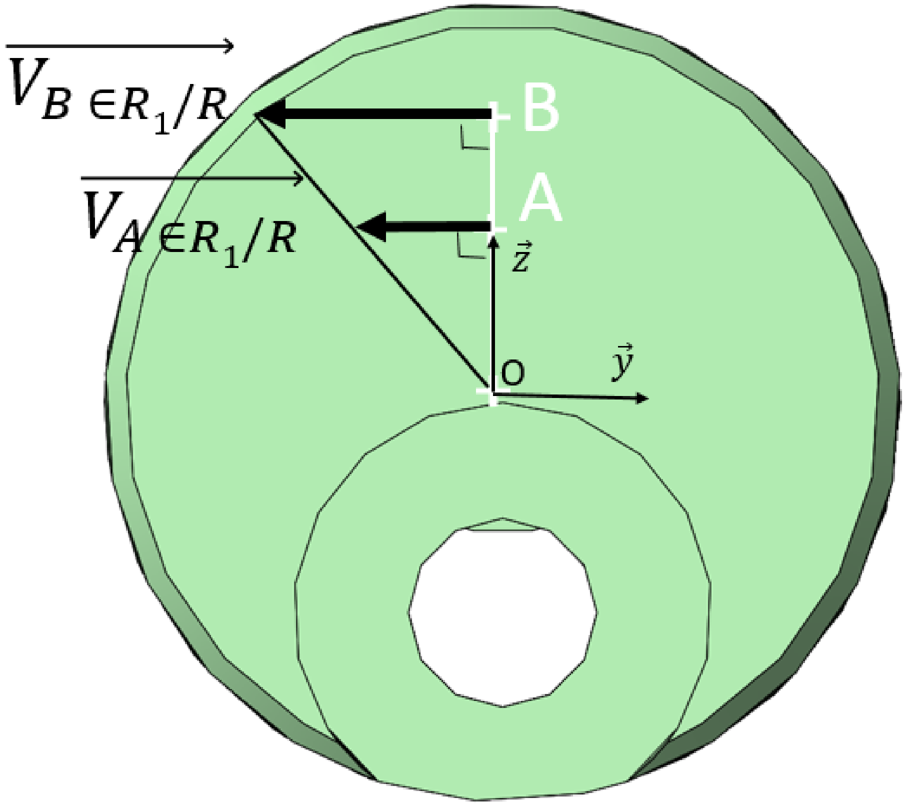
$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O\in 1}$$

Sur l'axe de rotation le torseur est un glisseur.

Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

Interprétation graphique



<u>Interprétation graphique :</u>

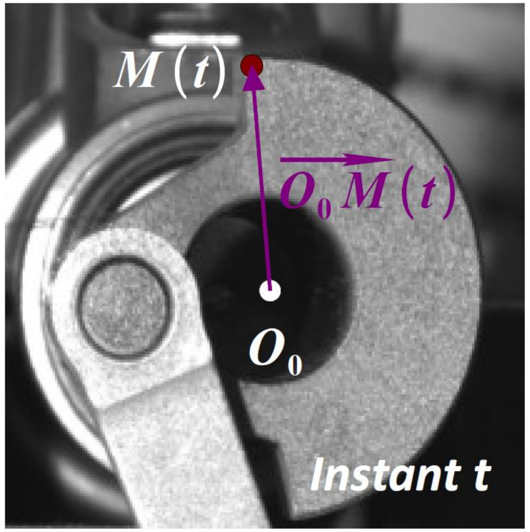
Proportionnalité entre les intensités des vecteurs vitesse et les distances des points par rapport à l’axe de rotation.

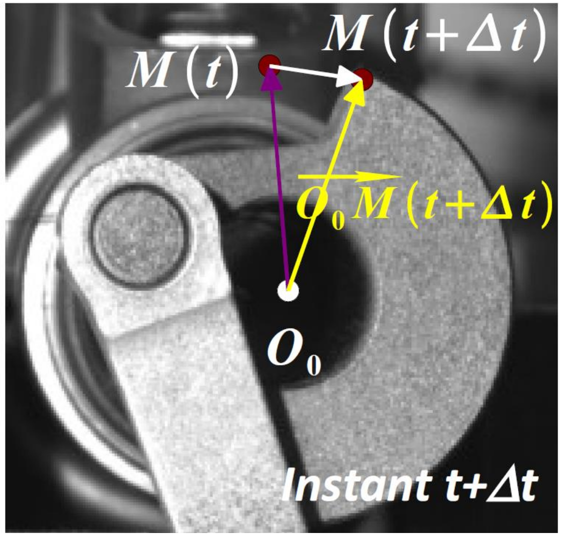
Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

Interprétation graphique

La visualisation du champ de vecteur vitesse du vilebrequin peut être obtenue expérimentalement par analyse d'images obtenues d'une caméra rapide grâce à une technique de corrélation d'images (mesure du déplacement entre 2 images successives, ici 600 000 image/s).



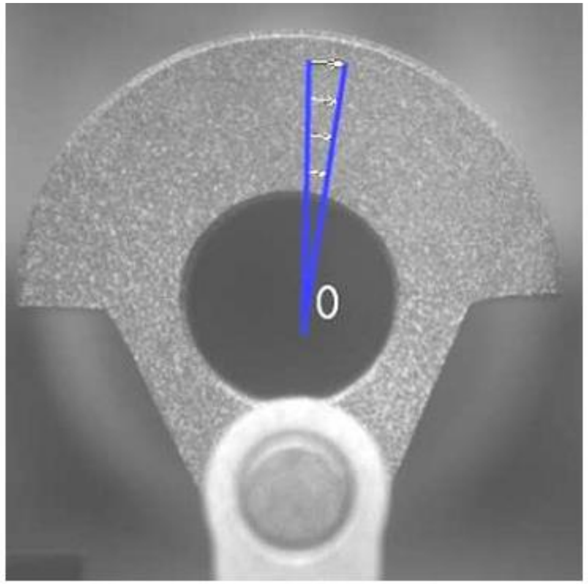


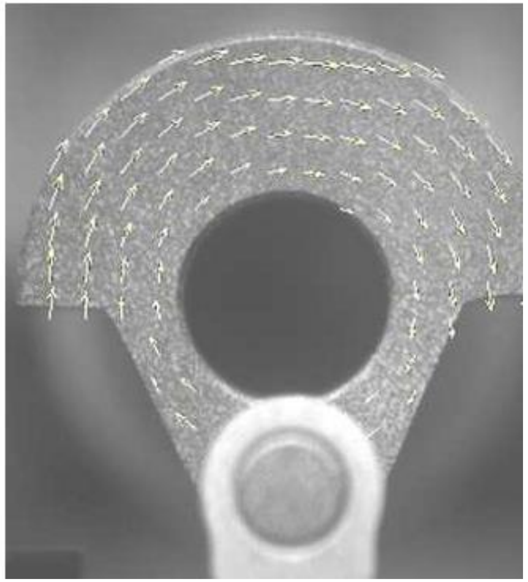
Mouvements particuliers

Le mouvement de rotation

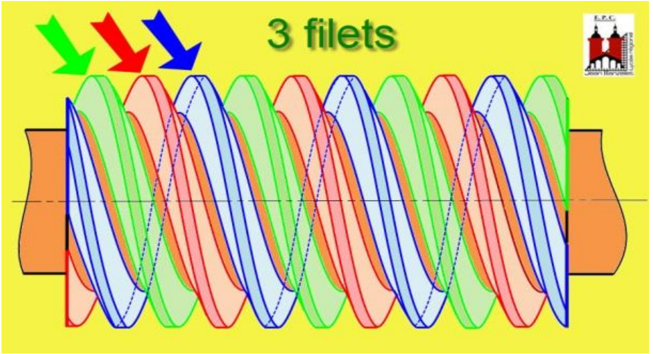
Interprétation graphique

La visualisation du champ de vecteur vitesse du vilebrequin peut être obtenue expérimentalement par analyse d'images obtenues d’une caméra rapide grâce à une technique de corrélation d'images (mesure du déplacement entre 2 images successives, ici 600 000 image/s).





Mouvements particuliers



Le mouvement hélicoïdal

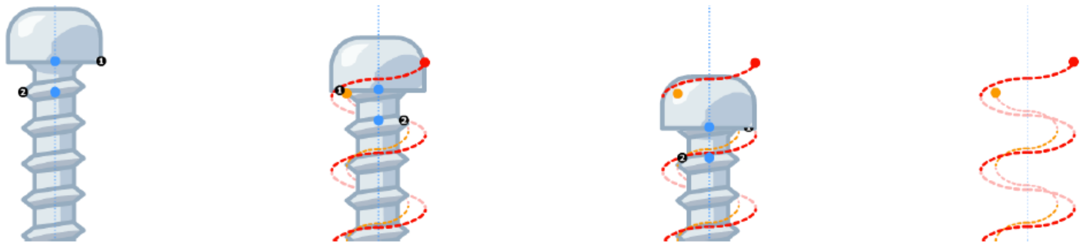
Mouvement complexe (combinaison de rotation(s) et de translation(s))

→ Exemple → mouvement hélicoïdal (une vis en mouvement par rapport à un écrou).

- L'angle de rotation autour de l'axe commun est proportionnel au déplacement sur ce même axe.

Mouvements particuliers

Le mouvement hélicoïdal



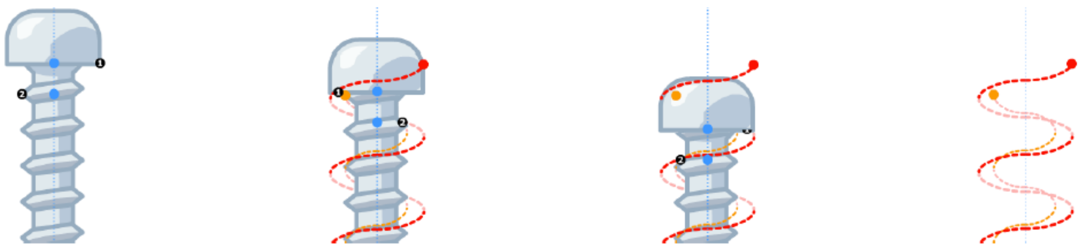
- Paramètre de position angulaire de S dans R_0 : $\psi = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ d'où $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0}$
- Paramètre de position d'un point M : $\overrightarrow{V_{M\in S/R_0}} = V_z\,\overrightarrow{z_0}$

Relation de proportionnalité entre l'angle de rotation et l'avance : $V_z = k.\dot{\psi}$.

Le pas du mouvement hélicoïdal : $\boldsymbol{V_z = k.\dot{\psi} = \frac{pas}{2\pi}\dot{\psi}}$

Mouvements particuliers

Le mouvement hélicoïdal



$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\vec{z} \\ V_z\vec{z} \end{Bmatrix}_{A\in 1} \text{ et } V_z = \frac{pas}{2\pi}\dot{\psi}$$

Les trajectoires des points M de S dans le mouvement par rapport à R_0 sont des hélices d'axe D.

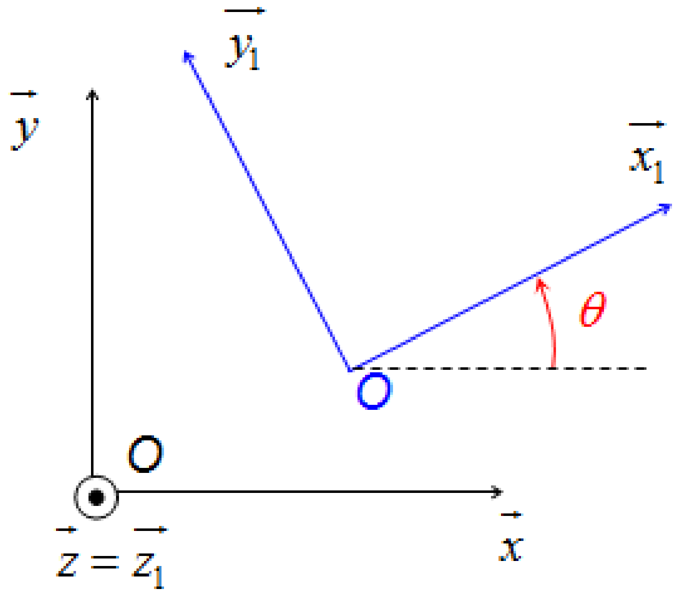
Mouvement plan sur plan

Définition

$R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$et R_1 $(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ attachés à deux solides S et S_1.

Si, au cours du mouvement de S par rapport à S_1, un plan P lié à S reste constamment confondu avec un plan P_1 lié à S_1, le mouvement de S par rapport à S_1 est appelé mouvement plan sur plan.

L'orientation de R_1 par rapport à R est définie par le seul angle θ.



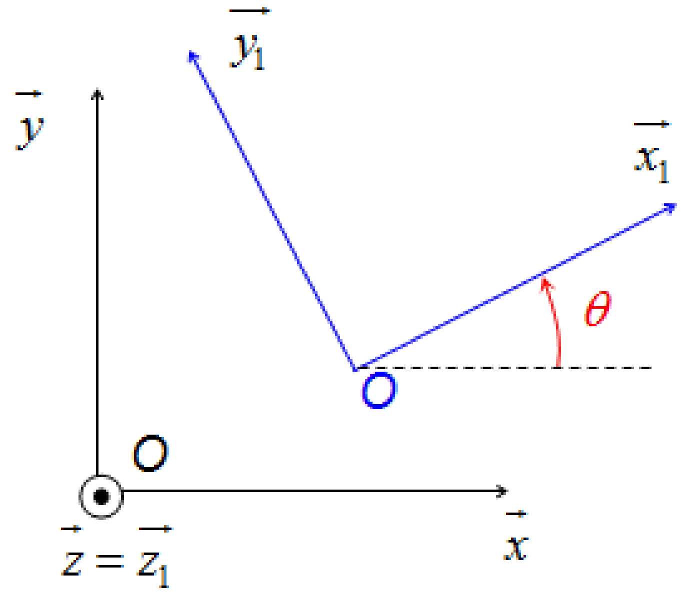
Mouvement plan sur plan

Définition

<u>Propriétés :</u>

- Vecteurs vitesse de tous les points de S_1 → inclus dans le plan $P(O,\vec{x},\vec{y})$.

- Le vecteur rotation de S_1 par rapport à S → perpendiculaire au plan $P(O,\vec{x},\vec{y})$.



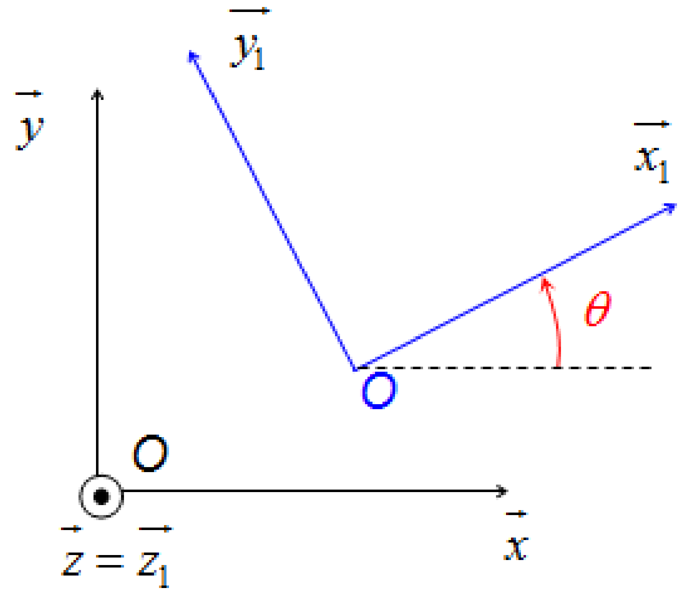
Mouvement plan sur plan

Définition

<u>Exemple :</u>

Mouvement plan $(\vec{x}, \vec{y})$:

$$\{V_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \cdot & V_x \\ \cdot & V_y \\ \omega_z & \cdot \end{Bmatrix}_{A,R}$$



Mouvement plan sur plan

Centre instantané de rotation

Il existe à l'instant t un point *I*, appelé centre instantané de rotation (CIR) du mouvement de S_1 par rapport à S tel que :

$$\overrightarrow{V_{I\in S_1/S}} = \vec{0}$$

- $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S}} = \overrightarrow{V_{I\in S_1/S}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{0} + \dot{\theta}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{IM}$

- $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S}}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{IM} \Rightarrow$ *I* se trouve sur la perpendiculaire à $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S}}$.

Mouvement plan sur plan

Centre instantané de rotation

<u>Remarques :</u>

- Connaissant du CIR de S_1/S → direction de la vitesse de n'importe quel point de S_1/S.
- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation (considéré à l'infini).
- Mouvement de rotation plane → CIR = centre de la rotation.
- A l’instant $t + \Delta t$ → CIR peut changer de position.

Mouvement plan sur plan

Base et roulante

I → différent à chaque instant → se déplace au cours du mouvement.

La base est la trajectoire du CIR dans le plan *P*.

La roulante est la trajectoire du CIR dans le plan P_1.

Remarque : La base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

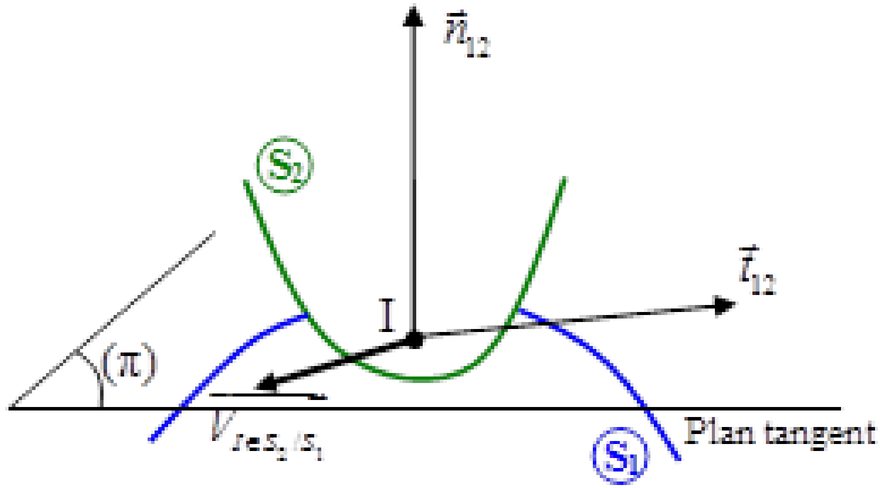
Cinématique du contact ponctuel

Hypothèses et modèle

Point de contact I

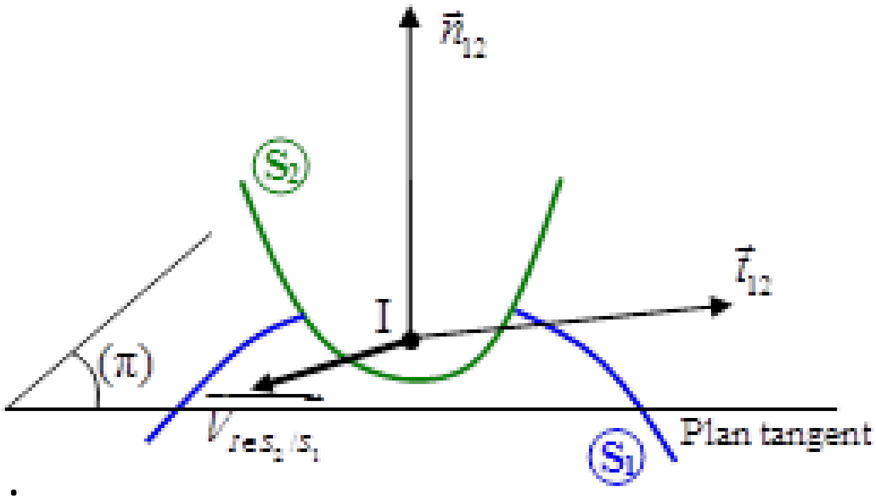
Normale au contact $\overrightarrow{n_{12}}$

Plan tangent au contact (π) entre les deux solides (S_1 est en dessous de (π), S_2 est au-dessus de (π)).



Cinématique du contact ponctuel

Hypothèses et modèle



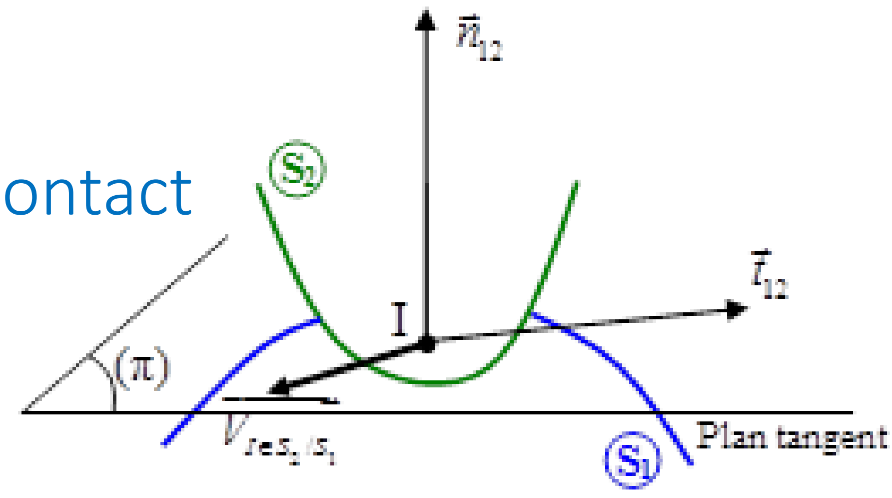
Le mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 au point I :

$$\{V_{S_2/S_1}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} \\ \overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} \end{matrix}\right\}_I$$

Au cours du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1, **on suppose qu'il existe toujours un point de contact (non rupture du contact).**

Cinématique du contact ponctuel

Mise en évidence du point coïncident de contact



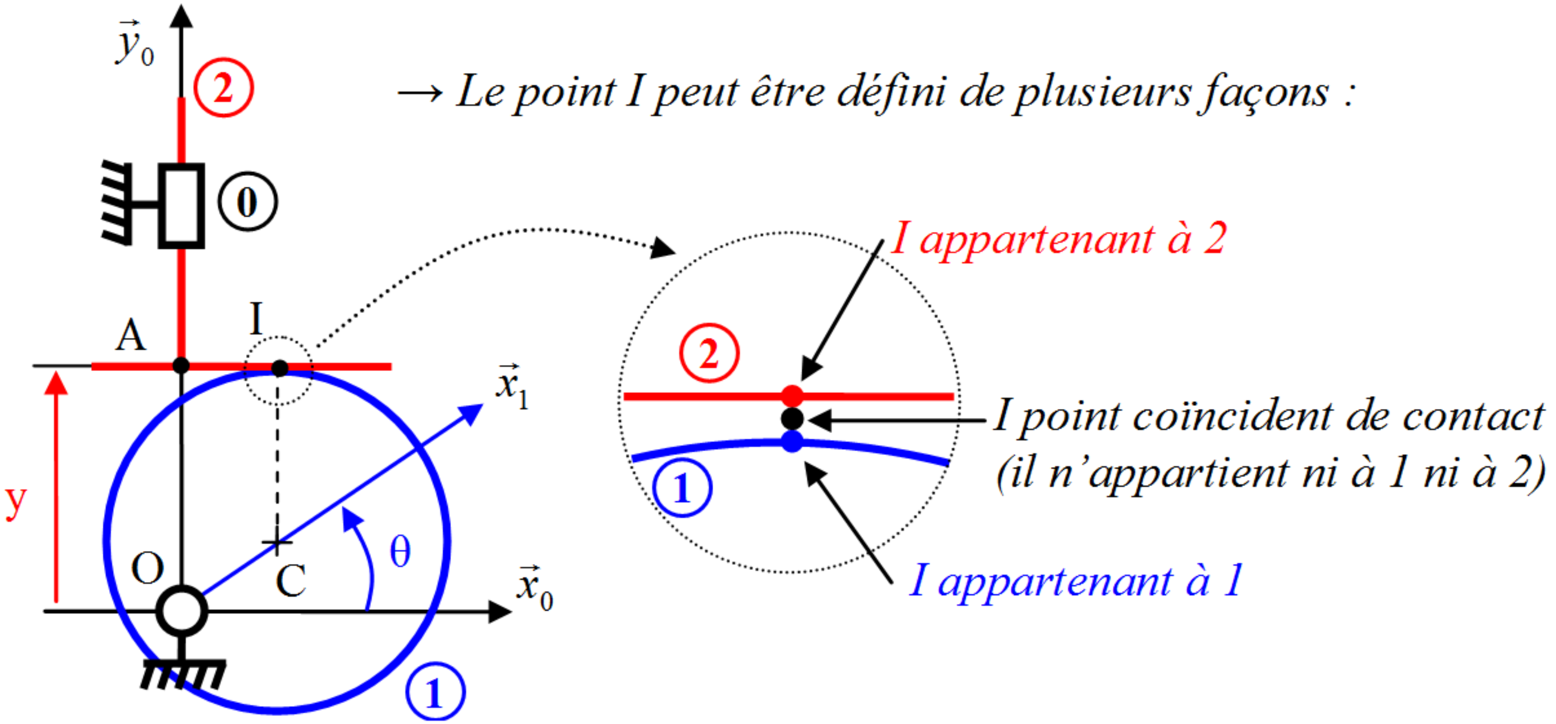
- Le point I matériel appartenant au solide 1
- Le point I matériel appartenant au solide 2
- Le point I qui correspond au point géométrique de contact et qui n'est lié à aucun de deux solides

$$\overrightarrow{V_{I\in S_2/R}} \neq \overrightarrow{V_{I\in S_1/R}} \neq \overrightarrow{V_{I/R}}$$

Cinématique du contact ponctuel

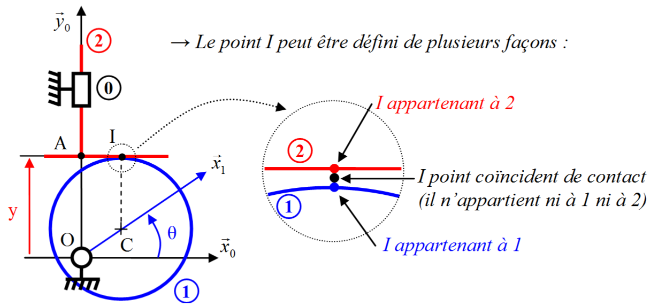
Mise en évidence du point coïncident de contact

__Exemple__ : système de commande par excentrique. La rotation du solide 1 par rapport au bâti entraîne la translation alternative du solide 2 par rapport au bâti.

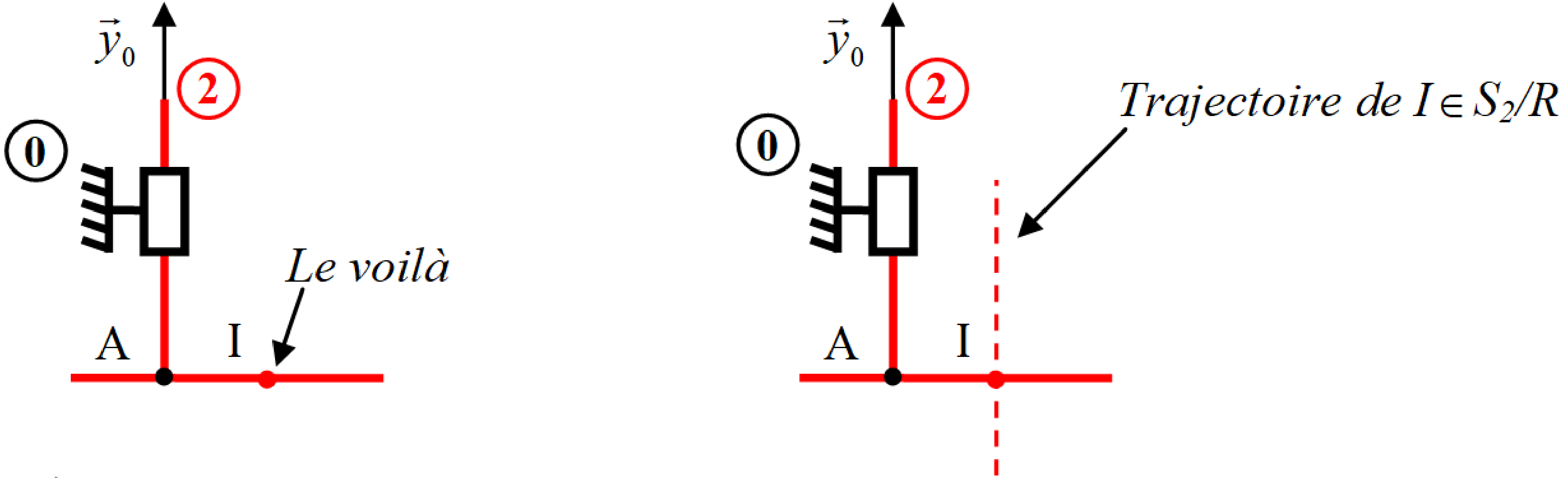


Cinématique du contact ponctuel

Mise en évidence du point coïncident de contact



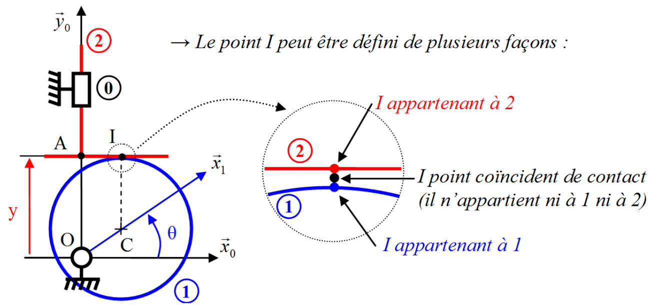
I peut appartenir au solide 2 :



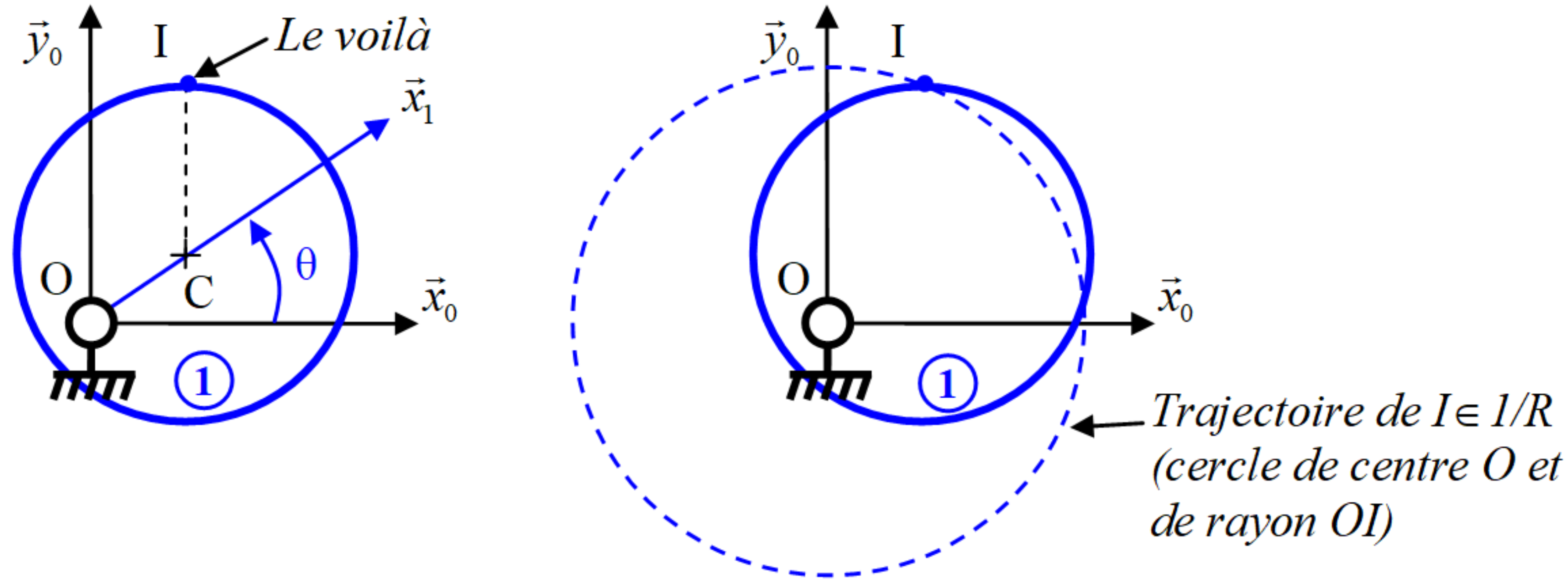
Nature du mouvement de $I \in 2/R$: translation rectiligne d'axe $(A, \vec{y}_0)$

Cinématique du contact ponctuel

Mise en évidence du point coïncident de contact



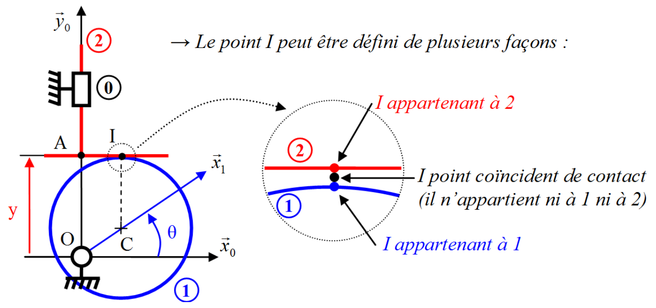
I peut appartenir au solide 1 :



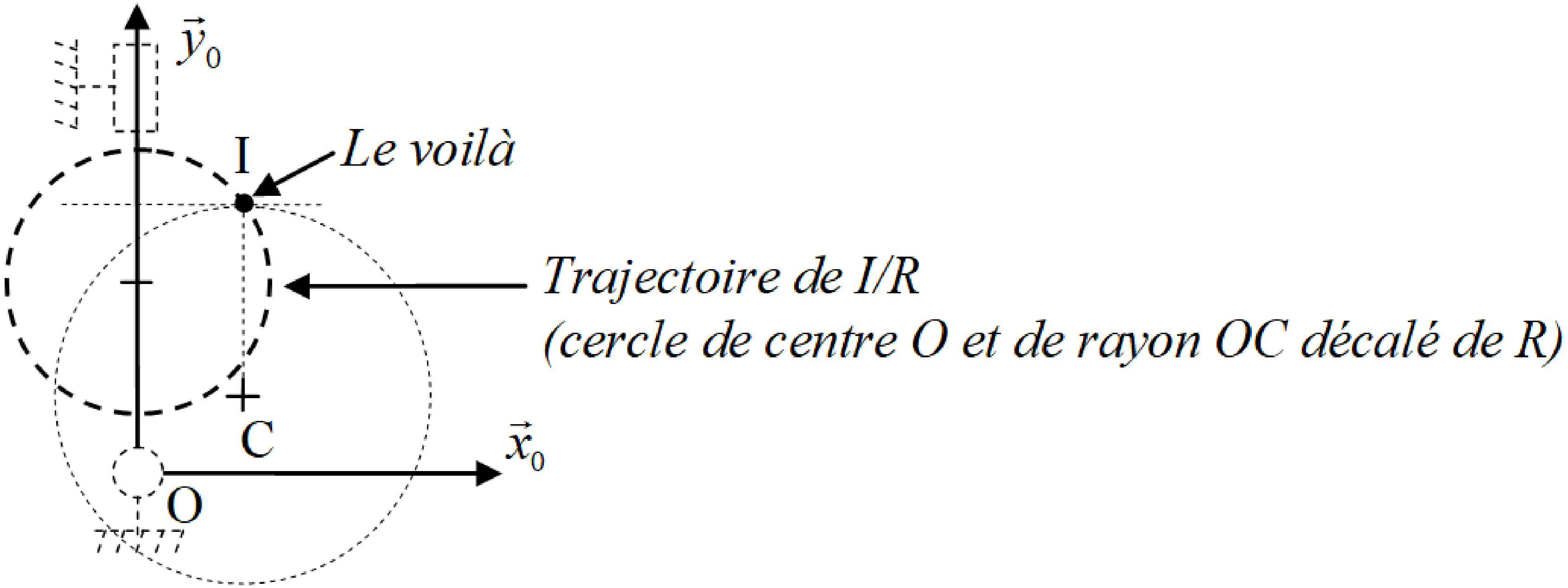
Nature du mouvement de $I \in 1/R$: rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$

Cinématique du contact ponctuel

Mise en évidence du point coïncident de contact



I peut être point coïncident de contact :



Cinématique du contact ponctuel

Vitesse de glissement

<u>Définition :</u> On appelle vecteur vitesse de glissement en I de S_2/S_1 le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{V_{I \in S_2/S_1}} = \overrightarrow{V_{I \in S_2/S_0}} - \overrightarrow{V_{I \in S_1/S_0}}$$

Le vecteur vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{I \in S_2/S_1}}$ est nécessairement contenu dans le plan tangent (π).
En effet, son produit scalaire avec la normale est nul.

Elle est indépendante du repère de référence.

Cinématique du contact ponctuel

Méthode de calcul pour le vecteur vitesse de glissement

Pour calculer une vitesse de glissement, il ne faut jamais utiliser la dérivation vectorielle

→ composition des vecteurs vitesse + formule du solide

Cinématique du contact ponctuel

Condition de roulement sans glissement

Condition de roulement sans glissement (RSG) en I de S_2/S_1 :

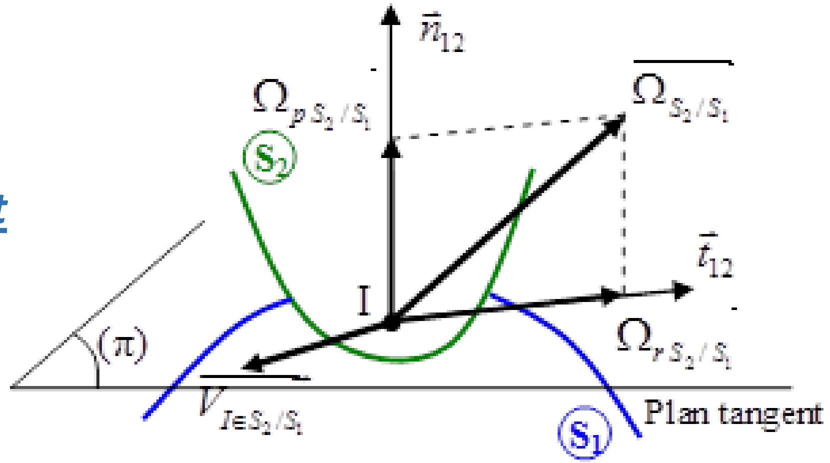
$$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} = \vec{0}$$

Cinématique du contact ponctuel

Condition de roulement sans glissement

Vitesse de rotation de roulement et vitesse de rotation de pivotement

$\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}}$ = somme de deux vecteurs :



- Vecteur normal au plan (π) = vecteur vitesse de rotation de pivotement de S_2/S_1.

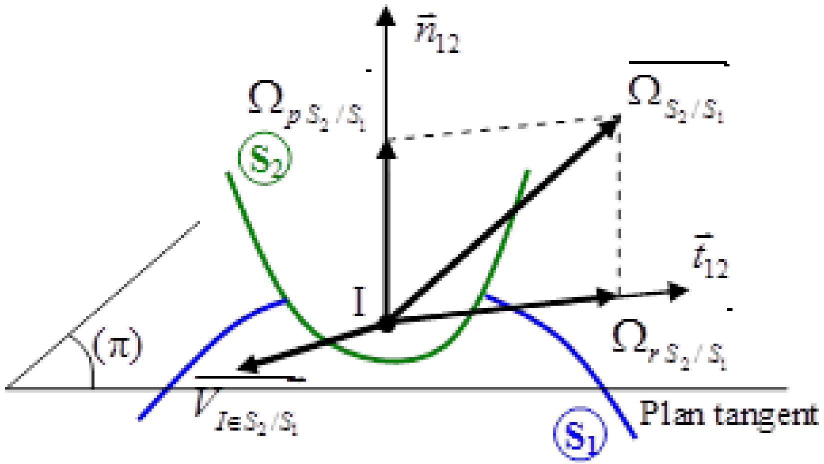
$$\overrightarrow{\Omega \mathrm{p}_{S_2/S_1}} = (\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}}.\vec{n}).\vec{n}$$

- Vecteur contenu dans le plan (π) = vecteur vitesse de rotation de roulement de S_2/S_1.

$$\overrightarrow{\Omega \mathrm{r}_{S_2/S_1}} = \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} - \overrightarrow{\Omega \mathrm{p}_{S_2/S_1}}$$

Cinématique du contact ponctuel

Condition de roulement sans glissement



$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathrm{p}\,S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathrm{r}\,S_2/S_1}}$$

Il est suivant la normale au contact

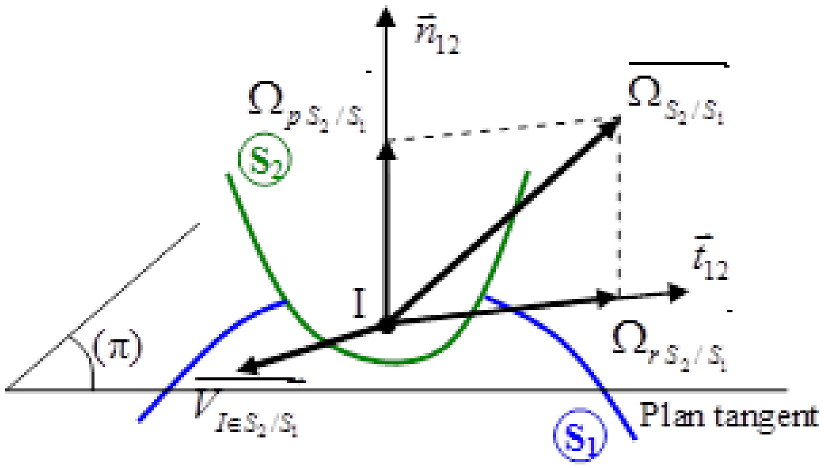
Il appartient au plan tangent

Cinématique du contact ponctuel

Condition de roulement sans glissement

Contact ponctuel de deux solides

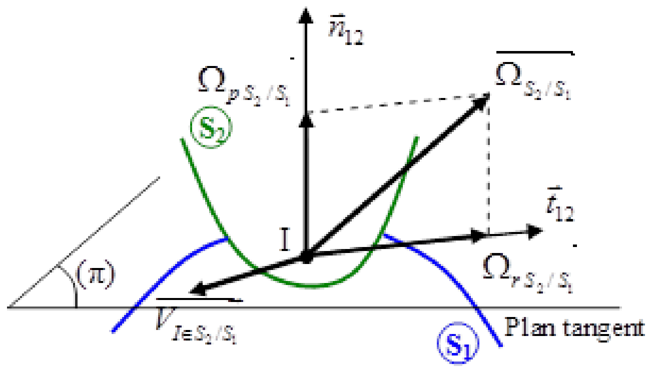
→ Roulement, Pivotement et Glissement



	$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} = \vec{0}$	$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} \neq \vec{0}$
$\overrightarrow{\Omega_N} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} = \vec{0}$	Adhérence	Glissement pur
$\overrightarrow{\Omega_N} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} = \vec{0}$	Pivotement sans glissement (pivotement pur)	Glissement avec pivotement
$\overrightarrow{\Omega_N} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} \neq \vec{0}$	Roulement sans glissement (roulement pur)	Glissement avec roulement
$\overrightarrow{\Omega_N} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} \neq \vec{0}$	Roulement avec pivotement sans glissement	Glissement avec roulement et pivotement

Cinématique du contact ponctuel

Condition de maintien du contact



Condition de maintien du contact :

$$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}}\cdot\vec{n}=0$$

Méthode classique de la cinématique des solides

Décomposer la vitesse en mouvements élémentaires (rotation ou translation) grâce à la relation de composition des vecteurs vitesse.

Ex : $\overrightarrow{V(M \in 3/0)} = \overrightarrow{V(M \in 3/2)} + \overrightarrow{V(M \in 2/1)} + \overrightarrow{V(M \in 1/0)}$

- Mouvement élémentaire = **rotation** → **formule de changement de point** en passant par **un point appartenant à l'axe de rotation** (vitesse nulle sur l'axe de rotation).

  Ex : $\overrightarrow{V(M \in 1/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

- Mouvement élémentaire = **translation** → vitesse est la même pour tous les points du solide → **formule de dérivation vectorielle.**

  Ex : $\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \overrightarrow{V(P \in 2/1)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_{R_1}$

  <u>Autre méthode (plus rapide) :</u> → **dérivée du paramètre qui varie, selon l'axe du mouvement** : si le point M varie de $x(t)$ dans le sens $\vec{x}$ alors $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \dot{x}(t).\vec{x}}$

- Mouvement = **combinaison de rotation(s) et de translation(s)** → **point du solide pour lequel on peut trouver la vitesse par dérivation vectorielle (attention aux conditions d'appartenance)** **ou** **point pour lequel la vitesse est donnée** → **relation de changement de point.**

  Ex : $\overrightarrow{V(M \in 3/2)} = \overrightarrow{V(B \in 3/2)} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}$ (composition des vecteurs rotation → $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$).